

TEXTE DE L'ÉPREUVE D'ANALYSE

DURÉE : 6 heures

Il est rappelé aux candidats :

— qu'il sera tenu le plus grand compte, dans l'appréciation des copies, du soin apporté à la présentation, de la clarté et de la précision des démonstrations ;

— qu'ils doivent respecter les notations fixées par l'énoncé.

On note \mathbf{C} le plan complexe, $z = x + iy$ un point quelconque de \mathbf{C} ($x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$ sont réels), r le module de z et \bar{z} le conjugué $x - iy$ de z .

Soit D le demi-plan $y > 0$ de \mathbf{C} . Pour tout élément z de D , on pose $z = re^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$. Si F est une application de D dans \mathbf{C} , on note, lorsqu'elles existent, $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$... les dérivées partielles de l'application $(x, y) \mapsto F(x + iy)$ et $\frac{\partial F}{\partial r}$, $\frac{\partial F}{\partial \theta}$, $\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$... les dérivées partielles de l'application $(r, \theta) \mapsto F(re^{i\theta})$.

Toutes les fonctions considérées dans ce texte sont supposées continues, sauf peut-être en un nombre fini de points. Si f est une application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , on appellera \mathfrak{Q} la condition :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt < +\infty .$$

Conformément à l'usage, $\mathbf{C}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à une indéterminée et à coefficients dans \mathbf{C} . Un élément quelconque P de $\mathbf{C}[X]$ est noté $\sum p_j X^j$. Toutes les suites considérées dans le problème sont indexées dans \mathbf{N} (ensemble des entiers naturels zéro compris).

I

Soit k l'application de $D \times \mathbf{R}$ dans \mathbf{R} définie par

$$k(z, t) = \frac{y}{(x-t)^2 + y^2} - \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right)$$

Si f est une application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , on note Kf l'application de D dans \mathbf{C} définie par $Kf(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, t) f(t) dt$, lorsque cette intégrale est convergente pour tout z appartenant à D .

a. Si f satisfait à \mathfrak{Q} , démontrer que Kf existe, que Kf est indéfiniment continûment dérivable par rapport aux variables x et y et qu'on a :

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) Kf = 0 .$$

b. L'application f vérifiant toujours \mathfrak{Q} , on la suppose continue au point t_0 de \mathbf{R} ; démontrer qu'on a :

$$\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ y > 0}} Kf(z) = f(t_0) .$$

II

a. Soit F une fonction définie dans le demi-plan $y \geq 0$ de \mathbf{C} et à valeurs dans \mathbf{C} . On suppose que F est continue, que sa restriction à \mathbf{R} est holomorphe et que F vérifie $\lim_{\substack{z \rightarrow x \\ y \geq 0}} \frac{F(z)}{z} = 0$.

Démontrer que, pour tout z de \mathbf{D} , on a

$$F(z) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A k(z, t) F(t) dt.$$

b. Expliciter Kf pour $f(t) = \text{Log} |t - \alpha|$, où α est un complexe arbitraire (on pourra d'abord supposer $\text{Im } \alpha < 0$ et utiliser II a. en choisissant F de sorte qu'on ait $\text{Re } F(t) = \text{Log} |t - \alpha|$ pour $t \in \mathbf{R}$).

Démontrer que, pour tout polynôme P à coefficients complexes et pour tout z non réel, on a :

$$(1) \quad \text{Log} |P(z)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|y| |\text{Log} |P(t)||}{(x-t)^2 + y^2} dt.$$

c. Pour quelles valeurs du réel σ l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\sigma}{1+t^2} dt$ est-elle convergente? Pour ces valeurs de σ expliciter Kf lorsque f est la fonction $t \mapsto |t|^\sigma$.

Vérifier en particulier qu'on a, pour tout r strictement positif, :

$$(2) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r |t|^\sigma}{r^2 + t^2} dt = c(\sigma) r^\sigma$$

et donner la valeur de $c(\sigma)$. (On pourra dans le cas $0 < \sigma < 1$ appliquer II a. à la fonction $z \mapsto \left(\frac{z}{i}\right)^\sigma = r^\sigma e^{i\sigma\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)}$).

III

a. On considère l'opérateur différentiel $\delta = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} = r \frac{\partial}{\partial r}$; $\delta \circ \delta$ est noté δ^2 . Soit f une application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} vérifiant \mathcal{Q} . Pour tout réel λ strictement positif, on note f_λ l'application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} définie par $f_\lambda(t) = f(\lambda t)$.

Démontrer qu'au sens de la convergence simple on a :

$$\delta^2 Kf = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \left[\frac{1}{(\lambda-1)^2} K \left(f_\lambda + f_{\frac{1}{\lambda}} - 2f \right) \right]$$

b. Exprimer l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ en fonction de δ et $\frac{\partial}{\partial \theta}$.

Soit f une application de \mathbf{R} dans \mathbf{R} vérifiant \mathcal{Q} . On suppose que les deux fonctions $t \mapsto f(e^t)$ et $t \mapsto f(-e^t)$ sont convexes; démontrer qu'on a : $\frac{\partial^2 Kf}{\partial \theta^2} \leq 0$.

c. On suppose que f est une fonction paire vérifiant les hypothèses de III b. Démontrer que, pour tout r fixé strictement positif, la fonction $\theta \rightarrow Kf(re^{i\theta})$ admet un maximum atteint pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.

IV

Dans cette question,

● W désigne une application paire de \mathbf{R} dans $[1, +\infty[$, vérifiant

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\text{Log } W(t)}{1+t^2} dt < +\infty$$

et telle que la fonction $t \rightarrow \text{Log } W(e^t)$ soit convexe; on pose pour tout r strictement positif $\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \text{Log } W(t)}{r^2+t^2} dt$ et,

pour tout élément j de \mathbf{N} , $M_j = \sup_{r>0} \frac{r^{j+\frac{1}{2}}}{e^{\mu(r)}}$.

● $P = \sum p_j X^j$ est un élément de $\mathbf{C}[X]$ satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |P(t)|^2 (W(t))^{-1} dt \leq 1.$$

a. Prouver que, pour tout réel u et tout réel strictement positif v , on a :

$$uv \leq e^{u-1} + v \text{Log } v$$

b. Démontrer l'existence d'un réel C indépendant de P et W tel que pour tout z non réel on ait

$$|P(z)| \leq C |y|^{-\frac{1}{2}} e^{\mu(r)}$$

On utilisera l'égalité

$$\begin{aligned} \text{KLog}|P|(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} h(z, t) \text{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}| dt \\ &\quad + \frac{1}{2} \text{KLog} W(z) \end{aligned}$$

et on appliquera les résultats des questions II et III ainsi que l'inégalité IVa., où il est suggéré de remplacer u par $\text{Log} |(P(t))^2 (W(t))^{-1}|$.

c. Dédire de IVb. l'existence d'un réel H , indépendant de P et W , tel que, pour tout j , on ait : $|p_j| \leq \frac{H}{M_j}$.

V

On désigne toujours par W une application satisfaisant aux hypothèses de IV. On suppose en outre que, pour tout élément j de \mathbf{N} , on a :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^j}{W(t)} = 0.$$

Les notations de IV sont conservées.

a. Démontrer qu'il existe une suite (P_n) de polynômes $P_n = \sum p_{nj} X^j$ satisfaisant aux conditions :

(i) P_n est de degré n

$$(ii) \int_{-\infty}^{+\infty} P_m(t) P_n(t) (W(t))^{-1} dt = \delta_{mn} = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ 1 & \text{si } m = n \end{cases}$$

b. Dédire de IV que, pour tout élément j de \mathbf{N} , on a :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |p_{nj}|^2 \leq \left(\frac{H}{M_j} \right)^2$$

c. Soit (b_n) une suite complexe satisfaisant à : $\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$.

Démontrer que la série $\sum_0^{+\infty} b_n P_n(z)$ est convergente dans \mathbf{C} et que sa somme est une fonction entière de z (c'est-à-dire holomorphe dans le plan complexe \mathbf{C} tout entier).

d. Soit (a_j) une suite complexe satisfaisant à : $\sum_0^{+\infty} \left| \frac{a_j}{M_j} \right| < +\infty$.

Démontrer l'existence d'une suite unique (b_n) de complexes telle qu'on ait $\sum_0^{+\infty} |b_n|^2 < +\infty$ et que la fonction $f = \sum_0^{+\infty} b_n P_n$ vérifie pour tout j $\int_{-\infty}^{+\infty} t^j f(t) (W(t))^{-1} dt = a_j$.

VI

Dans cette question on note

● ρ un réel strictement positif et $\sigma = \frac{1}{\rho}$ son inverse;

● s^ρ l'ensemble des suites complexes (a_n) telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de la suite) pour lequel on a :

$$\sup_{n \geq 0} [c^{-n} n^{-\rho n} |a_n|] < +\infty$$

● S^ρ l'ensemble des applications f indéfiniment dérivables de \mathbf{R} dans \mathbf{C} telles qu'il existe un réel c strictement positif (dépendant de f) pour lequel on a :

$$\sup_{\substack{n \geq 0 \\ x \in \mathbf{R}}} [c^{-n} n^{-\rho n} |f^{(n)}(x)|] < +\infty$$

● W_A l'application de \mathbf{R} dans \mathbf{R} : $t \mapsto W_A(t) = \exp\left(\frac{|t|}{A}\right)^\sigma$, associée à un réel A strictement positif quelconque $\left(\sigma = \frac{1}{\rho}\right)$.

a. Soit g une application de \mathbf{R} dans \mathbf{C} satisfaisant à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2 (W_A(t))^{-1} dt < +\infty$$

Le nombre x étant réel, on pose :

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) (W_A(t))^{-1} dt$$

Démontrer qu'on définit ainsi une application f de \mathbf{R} dans \mathbf{C} , qui est élément de S^ρ et qui, pour tout entier positif ou nul, satisfait à :

$$f^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} t^n g(t) (W_A(t))^{-1} dt$$

(on rappelle que $\Gamma(u) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{u-1} dt$ et $\left(\frac{u}{e}\right)^u \sqrt{\frac{2\pi}{u}}$ sont équivalents lorsque u tend vers $+\infty$).

b. On suppose désormais $\rho > 1$. L'application W_A vérifie alors les hypothèses de IV et V.

Calculer

$$\mu_A(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r \operatorname{Log} W_A(t)}{r^2 + t^2} dt \quad (\text{utiliser II c.})$$

Démontrer

$$M_j(A) = \sup_{r>0} \left[r^{j+\frac{1}{2}} \exp(-\mu_A(r)) \right] = \left[\gamma^A \left(j + \frac{1}{2} \right)^\rho \right]^{j+\frac{1}{2}}$$

où γ est un nombre qu'on calculera.

c. Dédurre de Vd. que, pour tout élément (a_n) de S^ρ , il existe un élément f de S^ρ tel que, pour tout n , on ait : $f^{(n)}(0) = a_n$.

(On cherchera f de la forme : $x \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} g(t) (W_A(t))^{-1} dt$, en choisissant A et g convenablement).

RAPPORT SUR L'EPREUVE D'ANALYSE

Le texte donné propose l'étude et la résolution d'un cas particulier du problème des moments :

- construire, (a_n) étant une suite donnée de nombres réels ou complexes, une fonction f qui satisfait pour tout n à condition $\int_{-\infty}^{+\infty} t^n f(t) dt = a_n$ et vérifie des inégalités du type

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} e^{|t|^\sigma} |f(t)| < +\infty \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{|t|^\sigma} |f(t)| dt < +\infty ;$$

ou bien de façon équivalente

- construire, (α_n) étant une suite donnée, une fonction g indéfiniment dérivable qui satisfait pour tout n à la condition $g^{(n)}(0) = \alpha_n$ et dont les dérivées successives vérifient des inégalités données du type

$$|g^{(n)}(t)| \leq C A^n n!^s \quad \text{pour tout } t,$$

C, A et s étant des constantes données.

Les paragraphes I, II, III et IV sont des préliminaires, qui introduisent et permettent d'utiliser la méthode du majorant harmonique.

COMPTE RENDU DE L'ÉPREUVE

Le problème proposé concerne l'analyse classique et ne nécessite pratiquement aucune connaissance "fine". Les correcteurs regrettent de constater qu'une grosse majorité de candidats n'ont que de bien faibles réflexes en analyse et paraissent même parfois étrangers aux méthodes, aux exigences et aux motivations de cette partie du programme.

Tout en donnant quelques indications sur la solution, les lignes qui suivent, signalent des fautes qui parfois surprennent.

Partie I

1a. Il s'agit d'appliquer les théorèmes bien classiques de continuité et de dérivabilité d'une fonction définie par une intégrale : $F(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, t) dt$.

Devrait-il être nécessaire de rappeler qu'une telle fonction n'est pas automatiquement indéfiniment dérivable et qu'il importe par exemple de prouver que les intégrales des dérivées

successives $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^{m+n} f(x, y, t)}{\partial x^m \partial y^n} dt$ sont localement uniformément convergentes ? Cela peut se

faire ici en comparant à $\frac{1}{1+t^2}$ les dérivées du noyau de Poisson

$k(z, t) = \frac{y}{|z-t|^2} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t-\bar{z}} \right)$ où $z = x + iy$; il est étonnant que de nombreuses

copies n'arrivent pas, ou n'arrivent qu'à grand peine, à faire cette comparaison. L'expression

de k fournie par l'énoncé invite à remplacer les dérivations $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ par leurs combinaisons

linéaires $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right)$. Le noyau de Poisson $k(z, t)$, qui est à

valeurs réelles, n'est évidemment pas une fonction holomorphe de z comme l'affirment plusieurs copies.

Pour l'existence de Kf , aucun candidat pratiquement ne tient compte des éventuelles discontinuités de f à distance finie et ne dit que sont λ -mesurables (λ mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}) la fonction f , continue λ -presque partout, et la fonction $t \rightarrow k(z, t) f(t)$, bornée par une fonction λ -intégrable, d'après l'hypothèse (\mathcal{P}). Par ailleurs il est clair que les candidats ignorent les rapports entre l'intégrabilité Lebesgue et l'intégrabilité impropre Riemann.

Nombreuses sont les erreurs concernant $k(z, t)$, qu'un peu d'attention éviterait parfois ; citons par exemple :

- $(\forall z \in D) (\forall t \text{ "assez grand"}) (|(x-t)^2 + y^2| > 1 + t^2)$

- Si $y < 1$ on a $k(z, t) < \frac{1}{1+t^2}$

- $k(z, t) = \operatorname{Re} \frac{1}{t-z}$ - $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} (1+t^2) k(z, t) = 1$

- $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} k(z, t) = \frac{y}{t^2}$ etc.

Des candidats ne réalisent pas que $k(z, t)$ prend des valeurs positives. D'autres, trop nombreux, écrivent froidement "il suffit de montrer que $Kf(z) < +\infty$ " ... On abuse des expressions "se comporte comme...", "le comportement de la fonction..." et on trouve écrit :

- $\frac{f(x-iy)}{1+u^2}$ est une fonction p.p. continue, donc intégrable sur tout segment ;

- $\int_{-\infty}^{+\infty}$ existe si \int_{-x}^x a une limite quand $x \rightarrow +\infty$, ce qui est scandaleux et a été sanctionné

(D'ailleurs un certain nombre de candidats n'ont pas compris la formulation du IIa et pourquoi l'on n'écrivait pas tout simplement : $F = kF$!).

Trop de calculs faux et extrêmement pénibles, où interviennent de nombreux trinômes du second degré, sont entrepris pour comparer $k(z, t)$ à $\frac{1}{1+t^2}$, et souvent on lit :

" $Kf(z)$ existe si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|f(x-iy)|}{1+u^2} du < +\infty$, ce qui est, puisque f vérifie (\mathcal{P}) "...

Toutes les erreurs possibles semblent avoir été commises dans l'étude du caractère C^∞ de Kf et de son harmonicité ; par exemple :

- croire que Kf est holomorphe (sans être d'ailleurs bien gêné par le cas où f est à valeurs réelles) et ceci :

- soit parce que k est elle-même holomorphe en z ,
- soit parce que kf est C^∞ en x et y , donc holomorphe !

- prouver, sans s'étonner : $Kf(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u)}{1+u^2} du$

- croire que "du moment que Kf existe et que $Kf(z)$ est convergente, Kf est C^∞ en x et y "

- affirmer l'harmonicité de K sans la prouver, et en déduire aussi sans précautions celle de Kf .

Bien peu de candidats remarquent naturellement que K est harmonique comme partie imaginaire de $\frac{1}{t-z}$, et que d'autre part il suffit de justifier $\Delta kf = 0$ pour assurer le caractère C^∞ de Kf .

- pratiquement tous les essais de démonstration du caractère C^∞ de Kf par application du théorème de Lebesgue sont non concluants ; presque tous les candidats pensent notamment :

- soit que, si Kf est dérivable partiellement, c'est qu'on a pu dériver sous le signe somme ;
- soit que, si par exemple $\frac{\partial(kf)}{\partial x}$ est intégrable, alors $\frac{\partial Kf}{\partial x}$ existe, et l'on a :

$$\frac{\partial Kf}{\partial x} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} (k(z, t) f(t)) dt.$$

Le théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe somme est méconnu, et, semble-t-il, les candidats ne comprennent pas que la dérivabilité en un point est un phénomène local. Ainsi, le mot magique "uniforme" ou "uniformément" est-il employé à tort et à travers ! Les candidats semblent par ailleurs ignorer que la démonstration du caractère C^∞ de Kf fait intervenir les $\frac{\partial^{p+q} Kf}{\partial x^p \partial y^q}$ et pas seulement les $\frac{\partial^n Kf}{\partial x^n}$ et les $\frac{\partial^n Kf}{\partial y^n}$, et aussi que l'existence de tous les

$\frac{\partial^{p+q} Kf}{\partial x^p \partial y^q}$ ne suffit pas. Dans les essais de démonstration concernant $\frac{\partial^n Kf}{\partial x^n}$, on trouve beaucoup

de maladresses ou d'erreurs concernant les degrés ; fort peu de candidats utilisent pour cela,

ou pour montrer l'harmonicité de k , les dérivations $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$.

Toutefois dans deux copies le raisonnement suivant a été récompensé par le maximum de points:

Si $A > 0$ $f_A = f \cdot X_{[-A, A]}$ vérifie (\mathcal{P}), et $Kf_A(z) = \int_{-A}^A k(z, t) f(t) dt$ est, très simplement, deux fois dérivable sous le signe somme, donc harmonique comme k . Mais on prouve sans peine que la convergence de Kf_A vers Kf , lorsque A tend vers $+\infty$, est uniforme sur tout compact de D . D'où le résultat.

lb. Dans cette question, il faut utiliser l'égalité $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} k(z, t) dt = 1$, et le fait que "toute la masse de k se concentre en t_0 " quand z tend vers t_0 ($y > 0$). En général les candidats

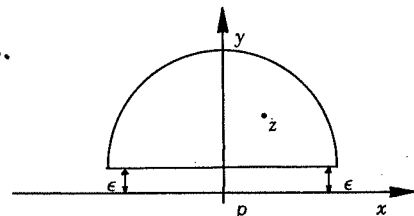
prouvent que $K1 = 1$ et réussissent à majorer correctement une expression de la forme :

$$\frac{1}{\pi} \left[\int_{t_0 - \alpha}^{t_0 + \alpha} k(z, t) |f(t) - f(t_0)| dt \right].$$

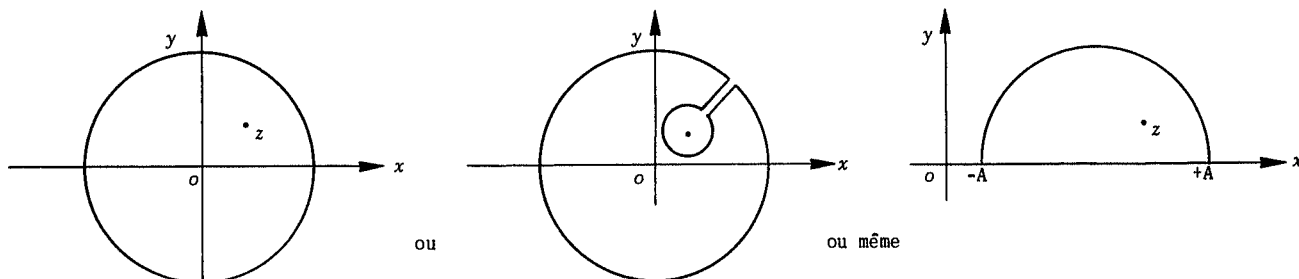
Mais la suite de la démonstration pose plus de difficultés et les majorations sont très souvent incorrectes. Signalons aussi que des candidats veulent à toute force utiliser un théorème des résidus pour arriver au résultat.

Partie II

||a. Rien dans l'énoncé ne suggère que l'intégrale $Kf_A(z) = \int_{-A}^A k(z, t) f(t) dt$ soit convergente ; il fallait introduire un contour convenable du demi-plan $y \geq 0$ - ce qui a été le cas en général - et faire un calcul de résidus. Quelques candidats précautionneux "décollent" même leur contour de l'axe réel mais, hélas ! intervertissent parfois l'ordre des passages à la limite.



On trouve toutefois des contours inattendus du type :



Relativement peu de candidats citent le lemme de Jordan ; très peu font une démonstration explicite ; il est très fréquent que l'on prouve : $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_A} k(z, \zeta) F(\zeta) d\zeta = 0$ en montrant séparément :

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_A} \frac{1}{\zeta - z} F(\zeta) d\zeta = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_A} \frac{1}{\zeta - \bar{z}} F(\zeta) d\zeta = 0 !$$

Rappelons que certains candidats considèrent que l'on prouve en fait : $F = KF$ ou plus précisément $F = KF/\mathbb{R}$; pour cela certains, fort mal inspirés, disent :

- "puisque $\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{F(z)}{z} = 0$, il est clair que F/\mathbb{R} vérifie (\mathcal{P})", l'explication dudit phénomène étant : on a certainement : $\lim_{z \rightarrow \infty} F(t) = 0$, donc F est bornée sur \mathbb{R} !"

- mieux encore, on a prouvé en la. et lb. que Kf est holomorphe et vérifie : $\lim_{\substack{z \rightarrow t_0 \\ y > 0}} Kf(z) = f(t_0)$ si etc. ; donc, si F est "holomorphe dans D ", on a $KF/\mathbb{R} = F$ sur \mathbb{R} . L'analyticité prouve donc $KF/\mathbb{R} = F$ dans D . Ce genre de raisonnement se retrouve même dans une assez bonne copie où l'on essaie de se ramener au problème du disque.

||b. Il apparaît que bon nombre de candidats conçoivent mal le logarithme complexe et ses déterminations. On trouve presque systématiquement "la détermination du logarithme", "la détermination de l'argument" " $|\text{Log}(z-\alpha)| = \text{Log}|z-\alpha|$ ", " $\text{Log}(z-\alpha) = \text{Log}|z-\alpha| + i\theta$ " "...Il est même des candidats pour prouver que $\text{Log}|z-\alpha|$ est harmonique, donc partie réelle d'une fonction holomorphe dont on ne sait rien. Evidemment la plupart des candidats considèrent comme inutiles les démonstrations de ce que $\log(z-\alpha)$ satisfait aux hypothèses du a. et que $t \rightarrow \text{Log}|t-\alpha|$ vérifie (\mathcal{P}). Pour $\text{Im } \alpha > 0$, on trouve souvent $Kf(z) = \text{Log}|z-\alpha|$, et enfin, pour

l'inégalité (1), on a pu relever quelques énormités :

- $\text{Log } |P(z)|$ est une fonction analytique dans \mathbb{C} ;
- si P est de degré pair, ses zéros sont deux à deux conjugués...

Rares sont les candidats qui utilisent l'inégalité $|z-\bar{\alpha}| < |z-\alpha|$, si $\text{Im } z$ et $\text{Im } \alpha$ sont de signes contraires, et qui, séparant les cas $z \in D, z \notin D$, utilisent $\bar{P}(\bar{z})$.

||c. Un très grand nombre de copies oublient d'examiner le "comportement", au voisinage de $t = 0$, de $\frac{|t|^\sigma}{1+t^2}$ et concluent que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|^\sigma}{1+t^2} dt$ converge pour $\sigma < 1$ (au moins 80 % !); on peut même lire : " $t \rightarrow \frac{|t|^\sigma}{1+t^2}$ est toujours continue sur $[-A, A]$ ".

En général les candidats n'ont pas su se servir de la fonction indiquée par l'énoncé, et ont oublié que l'argument de z n'est pas le même sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$; d'où les résultats aberrants suivants : $c(\sigma) = 1, c(\sigma) = \pi$ etc. Dans plusieurs copies on peut

lire $\text{Re } \left| \frac{t}{i} \right|^\sigma = \left| \frac{t}{i} \right|^\sigma = |t|^\sigma$ pour t réel

Partie III

De façon générale, les parties III, IV, V, VI ont été peu abordées.

||a. On rencontre des calculs très pénibles pour déterminer $\delta^2 k$ dont ensuite on ne fait rien. Pourtant cette question présente peu de difficultés, si on applique correctement la formule de Taylor en remarquant qu'on a : $K(f_\lambda)' = (Kf)_\lambda$. On peut aussi faire le changement de variables : $r = e^t$

||b. On a : $\Delta = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \delta^2 \right)$, qui est à peu de choses près l'expression du Laplacien en coordonnées polaires. Si f vérifie l'hypothèse de l'énoncé, on a $f_\lambda + \frac{f_1}{\lambda} - 2f \geq 0$, d'où $\delta^2(Kf) \geq 0$ et $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (Kf) \leq 0$ puisque $\frac{\partial^2 Kf}{\partial \theta^2} + \delta^2(Kf) = 0$.

||c. Il fallait simplement remarquer qu'une fonction $g(\theta)$ concave et symétrique par rapport au point $\frac{\pi}{2}$ [$g(\pi-\theta) = g(\theta)$] atteint son maximum au point $\frac{\pi}{2}$. Mais certains candidats pensent que le raisonnement est terminé, une fois prouvée l'égalité $\frac{\partial}{\partial \theta} Kf(re^{i\theta}) \Big|_{\frac{\pi}{2}} = 0$!

Partie IV

Le IVa. se démontre de façon élémentaire en examinant la dérivée $\frac{\partial}{\partial u} (u v - e^{u-1} - v \log v)$.

Quelques erreurs inattendues sont relevées comme " u et v ont un rôle symétrique", " $v \log v$ est à valeurs positives"... ; trop de raisonnements non probants utilisent la convexité.

L'énoncé donnait des indications précises pour démontrer IVb. et IVc.

Partie V

La question Va. est presque une question de cours ; il s'agit du procédé d'orthonormalisation de Schmidt. Mais peu de candidats pensent à expliquer la convergence des intégrales

$\int_{-\infty}^{+\infty} P(t) Q(t) (W(t))^{-1} dt$ (P, Q sont des fonctions polynômes réelles) et que l'on munit ainsi

$\mathbb{R}[X]$ d'un produit scalaire. Les redémonstrations "à la main" du résultat sont en général incorrectes ou incomplètes.

Les questions Vb., Vc., Vd. n'ont pratiquement pas été abordées. Elles demandent une certaine familiarité avec le maniement des normes et des produits scalaires dans les espaces euclidiens

(ou hermitiens) ; la notion d'espace de Hilbert est utile, mais n'est pas indispensable, car ici tout se ramène à des questions sur les espaces hermitiens de dimension finie (en particulier le problème d'existence et d'unicité de V_d).

Partie VI

L'énoncé guide assez bien les candidats pour les parties de VI ne se déduisant pas des questions précédentes. Encore faut-il prouver que la fonction f est indéfiniment dérivable, et pour cela montrer par exemple que l'intégrale $f^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (it)^n e^{itx} g(t) W_A^{-1}(t) dt$ est uniformément convergente ; cela résulte en particulier de la convergence des deux intégrales $\int_{-\infty}^{+\infty} |(it)^n e^{itx} W_A^{-1/2}(t)|^2 dt$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t) W_A^{-1/2}(t)|^2 dt$, et de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Pour majorer les dérivées de f , il fallait alors examiner l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t^{2n} e^{-\frac{|t|}{A} \sigma} dt$ et utiliser la formule de Stirling rappelée dans l'énoncé.

QUELQUES REFLEXIONS GENERALES

1) Il semble que les candidats ne fassent que peu de profit de la lecture des rapports antérieurs ; il faut hélas ! encore répéter que :

- une écriture illisible ou presque ne peut qu'indisposer le correcteur ;
- l'usage de la règle (voire du compas) n'est pas interdit dans les épreuves ;
- il est recommandé d'employer correctement sa langue maternelle en formant des phrases intelligibles et en appliquant les règles usuelles de la grammaire et de l'orthographe ;
- il est permis de traiter le problème dans l'ordre des questions posées ;
- les quantificateurs ne se conjuguent pas et ne sont pas des abréviations ;
- il est indispensable de lire attentivement l'énoncé, d'en adopter les notations et les hypothèses (par exemple : ne pas faire semblant de confondre "continue" et "continue sauf en un nombre fini de points").

2) Les correcteurs notent que trop de candidats, une majorité semble-t-il, abusent des expressions suivantes -"et ainsi de suite" "on voit bien par récurrence que..." "d'après un calcul facile"(non traité) "on peut voir que..." "dans de bonnes conditions, on a..." etc.- En général il s'agit de bluffs d'autant plus naïfs qu'ils camouflent la seule réelle difficulté de la question et que leurs auteurs, amenés quelques lignes plus loin à expliciter un raisonnement ou un calcul, font la preuve de leur incompétence. Les correcteurs en arrivent ainsi à privilégier des copies honnêtes, qui citent explicitement des théorèmes exacts (exemples : théorème de Lebesgue de dérivation sous le signe \int , lemme de Jordan etc.) même si, dans la suite, les candidats ne réussissent pas à prouver que sont réunies les conditions d'application des dits théorèmes.

En résumé l'habitude est malsaine, qui consiste à "voir tout de haut" et à se gargariser de mots ; contrairement à ce que certains pensent, il est possible de donner des raisonnements clairs et convaincants sans consacrer des pages et des pages à écrire des trivialités non probantes, ni escamoter les difficultés par des ellipses à prétentions esthétiques.

LES NOTES

Un barème particulièrement indulgent a donné la répartition suivante des notes :

CANDIDATES : 687 copies

	0	1 à 4	5 à 9	10 à 14	15 à 19	20 à 24	25 à 29	30 à 34	35 à 39	40 à 44	45 à 49	50 à 60
présentes	104	162	161	91	52	41	26	16	12	8	4	10

CANDIDATS : 1 225 copies.

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
présents	147	420	208	136	124	95	38	26	9	7	3	4	8
admissibles	1	10	24	42	79	83	36	26	8	7	3	4	8
reçus	0	0	6	8	14	40	20	19	8	6	3	4	8

Ces tableaux font apparaître évidemment que les trois-quarts des candidats présents ont obtenu une note au plus égale à 15 sur 60. Il n'en reste pas moins que les correcteurs ont été heureux de trouver dans le peloton de tête des copies intéressantes qui sont la preuve d'une culture mathématique déjà solide.