EPREUVES ECRITES

TEXTE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

DURÉE : 6 heures

Les dessins demandés dans le texte seront exécutés sur papier millimétrique.

Pour cette épreuve, le problème a été choisi d'une approche assez facile. Les candidats sont prévenus qu'entreront dans l'appréciation des copies le soin apporté à la présentation, la clarté et la précision de la rédaction. Ils sont en particulier invités :

— d'une part à respecter les notations fixées par le texte;

— d'autre part à assortir leur rédaction de figures *soignées*, soit qu'elles soient explicitement demandées dans l'énoncé, soit que, les ayant aidés à réaliser une situation, elles leur permettent de s'exprimer plus clairement, étant bien entendu qu'une figure ne saurait se substituer à un raisonnement rigoureux.

Les différentes questions du problème, de difficultés inégales, ont une indépendance relative. Aucun ordre n'est imposé pour les résoudre. A condition de l'indiquer clairement, les candidats pourront utiliser pour la résolution d'une question des résultats fournis par l'énoncé d'une question précédente, même s'ils n'ont pu la résoudre.

PARTIE 0. — *Notations et définitions*

0.1.

Pour A et B parties d'un même ensemble, on pose

$$A \setminus B = \{ a \in A,\ a \notin B \} \quad .$$

On note $\mathbf{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\mathbf{R}$ le corps des réels, $\mathbf{C}$ celui des complexes. Si A est une partie minorée de $\mathbf{R}$, sa borne inférieure est désignée par $\inf A$.

On considère l'espace métrique $\mathbf{R}^2$ obtenu en munissant $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ de son produit scalaire canonique noté $(.\,|\,.)$, la norme associée étant notée $\|\ .\ \|$ et la distance associée $d(.\,,.)$. Deux vecteurs (ou points) $\xi = (x, y)$ et $\xi' = (x', y')$ ont pour *déterminant* dans la base canonique le réel $xy' - yx'$ *noté* $\det(\xi, \xi')$.

La lettre $\mathcal{D}$ désigne le sous-ensemble de $\mathbf{R}^2$ défini par :

$$\mathcal{D} = \left\{ (x,y)\ ; \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \quad , \quad y \geqslant 0 \ , \quad x^2 + y^2 \geqslant 1 \right\}.$$

On convient de noter :

$$0 = (0,0) \qquad u = (1,0) \qquad v = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad w = (0,1) \quad .$$

0.2.

On dira qu'une partie Λ de $\mathbf{R}^2$ est un *réseau*, s'il existe au moins une base $\{ \xi , \eta \}$ de $\mathbf{R}^2$ telle que l'on ait :

$$\Lambda = \mathbf{Z}\,\xi + \mathbf{Z}\,\eta = \{ p\,\xi + q\,\eta\ ;\ (p, q) \in \mathbf{Z}^2 \}.$$

Tout système $\{\xi', \eta'\}$, vérifiant $\Lambda = \mathbf{Z}\,\xi' + \mathbf{Z}\,\eta'$, est dit une *base du réseau.* On *note* respectivement :

Λ_e le réseau dont une base est $\{u, v\}$;

Λ_c le réseau dont une base est $\{u, w\}$;

Λ_r^θ le réseau dont une base est $\{u, \theta w\}$ avec $\theta \geqslant 1$.

Plus généralement un réseau est dit *réduit*, s'il admet une base de la forme $\{u, j\}$ avec $j \in \mathcal{D}$.

Deux réseaux sont dits *isométriques* (resp. *semblables*) s'il existe une isométrie (resp. similitude directe ou indirecte) de $\mathbf{R}^2$ transformant l'un en l'autre. Un réseau semblable à Λ_e est dit *équilatéral*; un réseau semblable à Λ_c (resp. à un Λ_r^θ) est dit *carré* (resp. *rectangulaire*).

0.3.

Pour un réseau quelconque Λ on appelle :

- *carcan* de Λ le nombre réel $\operatorname{carc}\Lambda = \inf\{\|\lambda\|;\ \lambda \in \Lambda \setminus 0\}$;
- *alvéole fondamental* de Λ l'ensemble

$$\mathcal{A}(\Lambda) = \{\xi \in \mathbf{R}^2;\quad \forall \lambda \in \Lambda,\ d(0, \xi) \leqslant d(\lambda, \xi)\}\ .$$

On introduit aussi

$$\mathcal{A}'(\Lambda) = \{\xi \in \mathbf{R}^2;\quad \forall \lambda \in \Lambda \setminus 0,\ d(0, \xi) < d(\lambda, \xi)\}\ .$$

Dans la suite du texte, on écrira en abrégé $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ pour $\mathcal{A}(\Lambda)$ et $\mathcal{A}'(\Lambda)$; on posera aussi, pour tout γ de $\mathbf{R}^2$,

$$\mathcal{A}_\gamma = \{\xi + \gamma;\quad \xi \in \mathcal{A}\} \qquad \text{et} \qquad \mathcal{A}'_\gamma = \{\xi + \gamma;\quad \xi \in \mathcal{A}'\}\ .$$

0.4.

Le *stabilisateur* d'un élément x d'un ensemble X, dans lequel opère un groupe G, est : $G_x = \{g \in G;\ g(x) = x\}$.

PARTIE I. — *Réseaux, classification*

I.1.

Dessiner $\mathcal{D}$.

Sur des figures séparées :

- dessiner Λ_e; déterminer et dessiner $\mathcal{A}(\Lambda_e)$; trouver $\operatorname{carc}\Lambda_e$;
- dessiner un Λ_r^θ; déterminer et dessiner $\mathcal{A}(\Lambda_r^\theta)$; trouver $\operatorname{carc}\Lambda_r^\theta$ et $\operatorname{carc}\Lambda_c$.

I.2.

Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un réseau Λ. Démontrer que la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ à éléments dans $\mathbf{Z}$ vérifiant $|ad - bc| = 1$. Énoncer une réciproque. Donner des exemples de telles matrices sans élément nul.

Établir que le réel $|\det \mathcal{B}|$ dépend seulement du réseau Λ et non du choix de sa base; on le *note* aire Λ. Calculer aire Λ_r^θ et aire Λ_e.

Lorsque Λ est réduit, démontrer que, si $\{u, j\}$ et $\{u, j'\}$ sont deux de ses bases avec j et j' éléments de $\mathcal{D}$, on a nécessairement $j = j'$; on *note* $j(\Lambda)$ le vecteur ainsi canoniquement attaché au réseau réduit Λ.

I.3.

Pour tout Λ démontrer que carc Λ est strictement positif et que les points de Λ sont isolés uniformément par des boules de rayon $\dfrac{\operatorname{carc}\Lambda}{2}$.

Prouver que le nombre $m(\Lambda)$ des éléments λ de Λ satisfaisant à $\|\lambda\| = \operatorname{carc}\Lambda$ est non nul et fini.

I.4.

Soit $\{\alpha, \beta\}$ une base de $\mathbf{R}^2$ vérifiant les conditions :

$$(\mathrm{K})\ \begin{cases} \|\alpha\| \leqslant \|\beta\| \\ 0 \leqslant (\alpha \mid \beta) \leqslant \dfrac{1}{2}\|\alpha\|^2 \end{cases}$$

Démontrer les résultats suivants :

(i) $\forall (p, q) \in \mathbf{Z}^2 \setminus (0, 0)$, $\|p\alpha + q\beta\| \geqslant \|\alpha\|$

(ii) $\forall p \in \mathbf{Z}, \forall q \in \mathbf{Z} \setminus 0$, $\|p\alpha + q\beta\| \geqslant \|\beta\|$

(iii) si $p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{Z} \setminus 0$, $(p, q) \neq (0, 1)$, $(p, q) \neq (0, -1)$, alors $\|p\alpha + q\beta\|^2 \leqslant \|\alpha\|^2 + \|\beta\|^2$ entraîne $\|p\alpha + q\beta\|^2 = \|\beta - \alpha\|^2$

I.5.

Prouver que, si ξ est un vecteur de Λ vérifiant $\|\xi\| = \operatorname{carc}\Lambda$, il existe η tel que $\{\xi, \eta\}$ soit une base de Λ.

Démontrer que tout réseau Λ possède une base $\{\alpha, \beta\}$ vérifiant (K).

I.6.

Établir que tout réseau est semblable à un réseau réduit et à un seul.

A tout réseau Λ on associe canoniquement, et on *note* encore $j(\Lambda)$ le vecteur de $\mathcal{D}$ canoniquement attaché dans **I.2.** au réseau réduit semblable à Λ. Où est $j(\Lambda)$ si Λ est équilatéral, rectangulaire ou carré?

Discuter $m(\Lambda)$ suivant la position de $j(\Lambda)$ dans $\mathcal{D}$.

Établir l'inégalité : aire $\Lambda \geqslant \dfrac{\sqrt{3}}{2}(\operatorname{carc}\Lambda)^2$ et discuter le cas de l'égalité.

Partie II. — *Isométries d'un réseau, tore plat*

II.1.

Démontrer : $\mathbf{R}^2 = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$ (voir **0.3.**)

A-t-on une partition?

Prouver que $\mathcal{A}$ est un hexagone convexe, sauf si Λ est rectangulaire, auquel cas $\mathcal{A}$ est un rectangle. Dessiner le cas général. Démontrer que $\mathcal{A}'$ est l'intérieur de $\mathcal{A}$ et que $\mathcal{A}'$ est partout dense dans $\mathcal{A}$.

II.2.

On *note* Γ le groupe Isom Λ des isométries de $\mathbf{R}^2$ conservant globalement Λ, *et* $\mathrm{T} = \operatorname{Trans}\Lambda$ le sous-groupe de Γ constitué par le groupe additif Λ opérant sur $\mathbf{R}^2$, c'est-à-dire par les translations $\xi \longmapsto \xi + \lambda$ avec $\lambda \in \Lambda$. Démontrer que T est distingué dans Γ. Soit G le groupe-quotient Γ/T, isomorphe au stabilisateur de 0 dans Γ; démontrer que G est un groupe fini, discuter le nombre de ses éléments et sa structure selon $j(\Lambda)$. Discuter dans G l'équation $s^n = e$, où e est l'élément neutre.

II.3.

Pour une base $\mathcal{B} = \{ \xi , \eta \}$ de $\mathbf{R}^2$, soit $\delta(\mathcal{B})$ l'ensemble des points de $\mathbf{R}^2$ de la forme $\rho\xi + \rho'\eta$ avec $(\rho, \rho') \in \mathbf{R}^2$ et $|\rho| + |\rho'| \leqslant \frac{1}{2}$, et $\Delta(\mathcal{B})$ la réunion des images de $\delta(\mathcal{B})$ par les translations $p\xi + q\eta$ avec $(p, q) \in \mathbf{Z}^2$ et $p + q$ pair. On choisit $\xi = (1, 0)$ et $\eta = (2, 1)$, et on note $\mathcal{H}$ l'ensemble $\Delta(\mathcal{B})$ correspondant. La base canonique étant figurée orthonormée (unité de longueur de 4 cm environ), représenter $\mathcal{H}$ par des hachures sur un dessin.

L'ensemble $\mathcal{H}$ est-il stable par le groupe Trans Λ_c?

II.4.

Étant donné un réseau Λ, on appelle ici *tore plat associé à* Λ, et on *notera* Tore Λ, le groupe-quotient $\mathbf{R}^2/\Lambda$ du groupe additif de $\mathbf{R}^2$ par le sous-groupe Λ, c'est-à-dire l'ensemble des classes $\Lambda + \xi$ avec $\xi \in \mathbf{R}^2$. La projection canonique $\mathbf{R}^2 \longrightarrow$ Tore Λ sera notée φ.

Démontrer que pour tout γ de $\mathbf{R}^2$ la restriction de φ à $\mathcal{A}'_\gamma$ (voir **0.3.**) est injective. On notera $\psi_\gamma : \varphi(\mathcal{A}'_\gamma) \longrightarrow \mathcal{A}'_\gamma$ l'application inverse de la double restriction de $\varphi : \mathcal{A}'_\gamma \longrightarrow \varphi(\mathcal{A}'_\gamma)$. Pour $\Lambda = \Lambda_c$ dessiner sur une même figure les deux ensembles $(\psi_0 \circ \varphi)(\mathcal{H})$ et $(\psi_\gamma \circ \varphi)(\mathcal{H})$ où ψ_0 correspond à $\gamma = (0, 0)$ et ψ_γ à $\gamma = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Partie III. — *Dualité, spectre d'un réseau*

III.1.

A un réseau Λ on associe la partie Λ^* de $\mathbf{R}^2$ définie par :

$$\Lambda^* = \{ \eta \in \mathbf{R}^2 \quad ; \forall \lambda \in \Lambda, (\eta \mid \lambda) \in \mathbf{Z} \} .$$

Démontrer que Λ^* est aussi un réseau; on l'appelle le *dual* de Λ.

Établir : $(\Lambda^*)^* = \Lambda$ et aire Λ . aire $\Lambda^* = 1$.

Dessiner sur une même figure Λ_0 et Λ^*_0, où Λ_0 est le réseau admettant pour base $\left\{ \left(\frac{4}{5}, 0\right), (1, 1) \right\}$.

Démontrer que le dual d'un Λ lui est semblable, c'est-à-dire que l'on a : $j(\Lambda^*) = j(\Lambda)$. La similitude peut-elle toujours être choisie directe?

III.2.

Étant donné un réseau Λ, une fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ est dite Λ-*périodique* si, pour tout élément ξ de $\mathbf{R}^2$ et tout élément λ de Λ, on a

$$f(\xi + \lambda) = f(\xi) .$$

A tout élément γ de $\mathbf{R}^2$, on associe la fonction f_γ définie par

$$\xi \longmapsto f_\gamma(\xi) = \exp[2i\pi(\xi \mid \gamma)] ;$$

f_γ peut-elle être Λ-périodique?

Pour toute fonction $f : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{C}$ de classe C^2 on pose

$$Df = -\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} ;$$

établir, quel que soit l'élément γ de $\mathbf{R}^2$, $Df_\gamma = 4\pi^2 \|\gamma\|^2 f_\gamma$.

III.3.

On appelle *valeur propre* du réseau Λ tout réel μ *non nul*, tel qu'il existe $\eta \in \Lambda^*$ satisfaisant à : $\mu = 4\pi^2 \cdot \| \eta \|^2$. La *multiplicité, notée* $m(\mu)$, d'une valeur propre μ est par définition le nombre des éléments η de Λ^* solutions de $4\pi^2 \| \eta \|^2 = \mu$. Démontrer que $m(\mu)$ est pair pour tout Λ et pour tout μ.

On appelle *spectre* de Λ l'ensemble, *noté* Spec Λ, des couples $(\mu, m(\mu))$ où μ parcourt l'ensemble des valeurs propres de Λ.

On note $\mu_1(\Lambda)$ la plus petite valeur propre :

$$\mu_1(\Lambda) = \inf\{4\pi^2 \| \eta \|^2 ;\ \eta \in \Lambda^* \setminus 0\}.$$

Établir : aire $\Lambda \,.\, \mu_1(\Lambda) \leqslant \dfrac{8\pi^2}{\sqrt{3}}$ et discuter le cas de l'égalité.

III.4.

Déterminer les valeurs propres de Λ_e, Λ_r^θ et Λ_c.

Pour Λ_c, calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$20\pi^2,\ 36\pi^2,\ 100\pi^2,\ 1\,460\pi^2 .$$

Quel est le P.G.C.D. des $m(\mu)$ relatifs à Λ_c?

Pour Λ_e calculer l'ordre de multiplicité de chacune des valeurs propres

$$\frac{16\pi^2}{3},\ \frac{112\pi^2}{3},\ 2\,128\pi^2 .$$

Que peut-on dire de $m(\mu)$ pour les valeurs propres de Λ_e?

III.5.

Existe-t-il des réseaux dont toutes les valeurs propres vérifient $m(\mu) = 2$?

III.6.

Démontrer que deux réseaux Λ et Λ' ont le même spectre si, et seulement si, ils sont isométriques.

III.7.

Étant donné un réseau Λ, on range ses valeurs propres par ordre croissant : $0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \dots$

Démontrer que la série $\sum_i m(\mu_i) e^{-t\mu_i}$ est convergente pour tout réel t strictement positif; on note $S(t)$ sa somme.

Il pourra être commode d'introduire des alvéoles relatifs à Λ^* et des intégrales doubles d'une fonction $(x, y) \longrightarrow g_\tau(x, y) = e^{-\tau(x^2+y^2)}$.

III.8.

Démontrer que $S(t)$ est, quand t tend vers 0 par valeurs positives, un infiniment grand équivalent à $\dfrac{\text{aire } \Lambda}{4\pi t}$. On pourra pour cela faire intervenir des intégrales doubles de deux fonctions g_τ.

RAPPORT SUR L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES GENERALES

Le problème n'exigeait pour sa résolution qu'un minimum de connaissances techniques. En le posant, le jury songeait avant tout à juger l'aptitude des candidats à raisonner et à rédiger avec clarté et précision. Aussi a-t-il voulu que les premières questions soient d'un abord facile pour mettre les concurrents en confiance. Par ailleurs il conseillait dans le préambule de rechercher un support concret du raisonnement dans des dessins exécutés avec soin "étant bien entendu qu'une figure ne saurait se substituer à un raisonnement rigoureux".

Ces précautions n'auront pas été tout à fait vaines en ce sens que le pourcentage des copies nulles est d'environ deux pour cent alors qu'il était de vingt pour cent l'an dernier. Il n'en reste pas moins que les résultats d'ensemble ont été décevants, et que le barème de correction a dû être extrêmement généreux pour obtenir un étalement convenable des notes.

Les raisons de cette médiocrité générale des copies semblent avoir des origines diverses. D'abord des lacunes graves ont été décelées chez bon nombre de candidats. Un discret sondage, par exemple, n'exigeant que des connaissances très élémentaires, était fait sur la topologie. Il a été particulièrement décevant : peut-on admettre dans une copie sur deux l'affirmation plus ou moins implicite que tout ensemble minoré de $\mathbb{R}$ comprend sa borne inférieure. D'autre part le raisonnement reste très superficiel : certaines propriétés demandées, qui paraissent évidentes, sont en fait difficiles à démontrer et, malgré la mise en garde de l'énoncé, de nombreux candidats n'ont pas su déceler et par conséquent résoudre ces difficultés. Enfin la rédaction est souvent mauvaise : hypothèses non formulées, raisonnements par trop schématiques, affirmations remplaçant des preuves, résultats mal mis en évidence ou énoncés de façon imprécise, fautes de calcul malheureuses, forme souvent négligée où l'obscurité du langage, les fautes d'orthographe, l'écriture difficile à lire sont condamnables.

Devant ces critiques il n'est peut-être pas inutile de rappeler ici ces quelques conseils que contenait déjà le rapport de 1972.

- garder son sang-froid et ne pas chercher à foncer trop vite en négligeant d'assurer solidement ses bases, dans l'intention louable, mais souvent déçue, d'aller très loin; un minimum d'attention ou de réflexion permettrait certainement par exemple d'éviter de placer $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ parmi les matrices à coefficients entiers ou d'écrire "la négation de $x \geqslant 0$ est $x \leqslant 0$".

- lire attentivement l'énoncé et chercher à tirer parti des indications qu'il donne.

Peut-être faut-il ajouter à l'intention des étudiants de Maîtrise, futurs agrégatifs, qu'une préparation à l'agrégation est une affaire de longue haleine ; il n'est jamais trop tôt pour apprendre à réfléchir, à se défier des abstractions vagues et à leur préférer des concepts bien ordonnés, enfin pour s'habituer à travailler et à rédiger proprement en temps limité.

Partie I

I1. Les dessins ne sont toujours pas faits avec soin et les figures sont trop souvent inexactes ; c'est ainsi que certains alvéoles sont parfois des disques, alors que l'énoncé précise en I2. qu'il s'agit d'hexagones ou de rectangles. Trop de candidats donnent l'impression d'ignorer la notion de médiatrice ; tels sont ceux qui ont dessiné $\mathcal{A}(\Lambda_e)$ en cercle ($x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}$) ou en hexagone ayant un sommet au milieu de Ou.

I2. Cette question est assez largement traitée. Mais des affirmations non étayées sont relevées, par exemple "pour que les entiers rationnels a, b, c, d soient divisibles par $\Delta = ad - bc$, il faut que $|\Delta|$ soit égal à un", ainsi que des confusions, par exemple entre application unimodulaire et isométrie, entre matrice orthogonale et matrice de déterminant égal à ± 1. Signalons enfin que le déterminant d'un couple de vecteurs de $\mathbb{R}^2$ n'est pas une notion intrinsèque.

I3. De nombreuses copies affirment : si (ξ,η) est une base de Λ, alors on a : carc Λ = inf. $(\|\xi\|, \|\eta\|, \|\xi - \eta\|, \|\xi + \eta\|)$; s'il en était ainsi, certaines questions deviendraient sans objet. Un simple dessin permettrait de construire un contre-exemple.

I4. L'habileté fait souvent défaut dans le maniement des inégalités et des confusions entre inégalités larges et strictes sont observées.

I5. I6. Le nombre des candidats abordant les questions suivantes se réduit considérablement et les essais se dispersent largement. Si quelques candidats font preuve de réflexion, parfois d'ingéniosité, nombre de démonstrations insuffisantes sont à déplorer, en particulier en I5., où la relation $ad - bc = \pm 1$ invitait à utiliser l'égalité de Bezout. La similitude indirecte est souvent oubliée et la discution relative à $m(\Lambda)$ parfois incomplète.

Partie II

II1. Signalons quelques affirmations erronées, telles que : "il n'existe pas de partition de $\mathbb{R}^2$ en sous-ensembles fermés (resp. compacts, resp. convexes, resp. connexes)" ; la partition la plus fine en est pourtant une !

II2. La démonstration de : "T est distingué dans Γ" est souvent incorrecte : les candidats ne distinguent pas l'application affine et l'application linéaire associée.

La discussion générale est incomplète (oubli des similitudes indirectes).

Trop de candidats ignorent qu'un groupe infini peut opérer sur un ensemble fini.

II3. Indépendante de tout ce qui précède, cette question a permis à quelques candidats d'obtenir des points précieux, grâce à une lecture attentive de l'énoncé.

II4. La question est rarement abordée.

Partie III

III1. Le mot dual n'est pas un mot magique : pour justifier la notation Λ^*, il ne suffit pas de considérer l'image dans $\mathbb{R}^2$ de la base duale de $\{\alpha,\beta\}$ dans $\mathbb{R}^{2*}$

III2., III3., III4. De nombreux points pouvaient s'obtenir aisément sur ces questions. Cependant les calculs d'arithmétique demandés en III4. ont souvent été inexacts. Pour Λ_e, on aurait évité des erreurs grossières en remarquant que $m(\mu)$ est nécessairement multiple de 6.

III5. Cette question invitait à construire α et β tels que $\|\alpha\|^2$, $\|\beta\|^2$, et $(\alpha|\beta)$ soient linéairement indépendants sur le corps des rationnels.

III6., III7., III8. Ces questions ont été abordées par moins de dix candidats. Aucune solution vraiment satisfaisante n'a été donnée.

Répartition des notes (entre 0 et 60)

Agrégation masculine : 1 258 copies

$n = 0$	$0 < n \leqslant 4$	$4 < n \leqslant 8$	$8 < n \leqslant 12$	$12 < n \leqslant 16$	$16 < n \leqslant 20$	$20 < n \leqslant 24$
1,7 %	7,0 %	15,2 %	21,0 %	18,8 %	13,0 %	8,0 %
$24 < n \leqslant 28$	$28 < n \leqslant 32$	$32 < n \leqslant 36$	$36 < n \leqslant 40$	$40 < n \leqslant 44$	$44 < n \leqslant 48$	$48 < n$
5,2 %	3,4 %	2,1 %	1,7 %	1,3 %	0,8 %	0,8 %

Agrégation féminine : 723 copies

$n = 0$	$0 < n \leqslant 5$	$5 < n \leqslant 10$	$10 < n \leqslant 15$	$15 < n \leqslant 20$	$20 < n \leqslant 25$	$25 < n \leqslant 30$
21	74	110	204	157	79	33
			$30 < n \leqslant 35$	$35 < n \leqslant 40$	$40 < n \leqslant 50$	$50 < n$
			22	14	7	2