RAPPORTS DE JURYS DE CONCOURS

Agrégation Mathématiques 1972

PUBLICATION DE L'INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUES

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION CHARGÉE DES PERSONNELS ENSEIGNANTS

Agrégation Mathématiques

1972

Rapport de MM. POUGNAND, Inspecteur général de l'Instruction publique
Président du jury masculin

MAGNIER, Inspecteur général de l'Instruction publique
Président du jury féminin

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUES
Service d'Édition et de Vente des Publications de l'Éducation Nationale

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

Session de 1972

AGREGATION HOMMES

Composition des jurys

M. POUGNAND, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Président ;*

M. COMBES, *Professeur à l'Université Paris VI, Vice-président ;*

Mme DUBOIS-VIOLETTE, *Inspecteur général de l'Instruction publique ;*

M. BERGER, *Professeur à l'Université Paris VII ;*

M. DEHEUVELS, *Professeur à l'Université Paris VI ;*

M. FERRIER, *Professeur à l'Université de Nancy ;*

M. GASTINEL, *Professeur à l'Université de Grenoble ;*

M. GEORGE, *Professeur à l'Université de Nancy ;*

M. HILY, *Professeur à l'Université de Nancy ;*

M. KREE, *Professeur à l'Université de Nice ;*

M. LEBORGNE, *Professeur à l'Université de Nantes ;*

M. QUERRE, *Président de l'Université de Brest ;*

M. RAOULT, *Professeur à l'Université de Rouen ;*

M. RIVET, *Professeur à l'Université de Rennes ;*

M. ROUGEE, *Professeur à l'Université de Rouen ;*

M. ZISMAN, *Professeur à l'Université Paris VII ;*

M. CRESTEY, *Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Saint-Louis ;*

M. CUENAT, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Hoche de Versailles ;*

M. DABLANC, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Hoche de Versailles ;*

M. FLORY, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand ;*

M. FRABOUL, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Clemenceau de Nantes ;*

M. GONTARD, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée du Parc à Lyon.*

AGREGATION FEMMES

M. MAGNIER, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Président ;*

M. ARNAUDIES, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Kléber de Strasbourg ;*

M. AVANISSIAN, *Professeur à l'Université de Strasbourg ;*

M. BAILLE, *Maître-assistant à l'Université de Grenoble ;*

M. BERROIR, *Professeur à l'Université de Paris VI ;*

Mme BLANCHETON, *Professeur à l'Université de Caen, Vice-présidente du jury ;*

M. BOURSIN, *Professeur à l'Université d'Orléans ;*

M. BOUSQUET, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Pasteur à Neuilly ;*

Mlle CALAIS, *Professeur à l'Université de Reims ;*

M. CHEVALIER, *Assistant à l'Université de Paris VI ;*

M. CŒURE, *Professeur à l'Université de Nancy ;*

M. DEHEUVELS, *Assistant à l'Université de Paris VI ;*

M. LETAC, *Professeur à l'Université de Clermont ;*

M. MARTIN, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée du Parc à Lyon ;*

M. ODOUX, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Champollion à Grenoble ;*

M. RAMIS, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Vice-président du jury ;*

M. ROBERT, *Professeur à l'Université de Lyon ;*

M. SIMON, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée J. Decour à Paris ;*

M. VAN CUTSEM, *Professeur à l'Université de Grenoble.*

LE DEROULEMENT DU CONCOURS 1972

EPREUVES PREPARATOIRES (écrit)

Les épreuves préparatoires ont eu lieu aux dates suivantes :

Composition de Mathématiques Générales : mardi 9 mai de 8 heures à 14 heures
Composition d'Analyse : mercredi 10 mai de 8 heures à 14 heures
Composition de Mathématiques Appliquées: vendredi 12 mai de 8 heures à 14 heures.

La composition de mathématiques appliquées comprenait trois options : analyse numérique, mécanique, probabilités, les candidats ayant été invités à préciser à l'avance l'option de leur choix.

Les listes d'admissibilité ont été affichées au Ministère de l'Education Nationale et au Lycée Saint-Louis à Paris :

- le 14 juin 1972 vers 13 heures pour l'agrégation féminine ;
- le 22 juin 1972 vers 18 heures pour l'agrégation masculine.

EPREUVES DEFINITIVES (oral)

Les épreuves définitives se sont déroulées à Paris :

- au Lycée Montaigne et à partir du mercredi 21 juin pour l'agrégation féminine ;
- au Lycée Jean de La Fontaine et à partir du 28 juin pour l'agrégation masculine.

Les résultats définitifs (liste d'admission à l'agrégation, liste des équivalences accordées des épreuves théoriques du C.A.P.E.S. ou du C.A.P.E.S. complet) ont été affichés au Ministère de l'Education Nationale et aux Lycées Saint-Louis, Montaigne ou Jean de La Fontaine :

- le mardi 25 juillet pour l'agrégation féminine ;
- le jeudi 27 juillet pour l'agrégation masculine.

STATISTIQUES DIVERSES

RESULTATS NUMERIQUES

		Candidats	Candidates
	Nombre de postes mis au concours :	170	134
(1)	Candidats inscrits :	1 209 + 21*	763
	Candidats présents à la 1re épreuve :	1 045 + 17*	655
	Candidats ayant terminé l'écrit :	915 + 14*	585
	Candidats déclarés admissibles :	310 + 4*	164
	Candidats admis à l'agrégation :	140 + 3*	86
	Equivalences accordées des épreuves théoriques du C.A.P.E.S :	8	11
	Equivalences accordées du C.A.P.E.S. complet :	4	3

Le pourcentage des abstentions totales se monte à 14 % pour l'agrégation masculine, 14 % pour l'agrégation féminine ; il était de 15 % en 1971.

Le pourcentage des abandons en cours d'écrit est de 13 % environ pour l'agrégation masculine, 11 % pour l'agrégation féminine ; il était de 15 % et 10 % en 1971.

----

(1) L'astérisque désigne les candidats étrangers

REPARTITION ENTRE LES TROIS OPTIONS

	Analyse numérique		Mécanique		Probabilités	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Ont composé	361	225	212	105	356	255
Admissibles	147(32)	80(26)	49(2)	20(2)	118(30)	64(27)
Admis	64(25)	40(20)	15(2)	6(1)	64(24)	40(25)

(Entre parenthèses est indiqué le nombre des candidats appartenant aux Grandes Ecoles)

STATISTIQUE SUR LES ADMISSIBLES AYANT PRESENTE DES CONCOURS ANTERIEURS

	Présentés		Admis	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Non déjà admissibles	34	15	9	5
Admissibles une fois	67	25	25	11
Bi-admissibles au moins	15	7	8	0

SITUATION UNIVERSITAIRE DES AGREGES

En séparant les candidats ou candidates en 11 groupes désignés par les abréviations suivantes :

U ou S : Elèves de l'E.N.S. Ulm ou de l'E.N.S. Jourdan
C ou F : Elèves de l'E.N.S. Saint-Cloud ou de l'E.N.S. Fontenay
T : Elèves de l'E.N.S.E.T.
A : Assistants de Facultés
P.C. : Professeurs certifiés
C.O. : Professeurs ou assistants en congé ou au Service National
C.P.R. : Professeurs-stagiaires de C.P.R.
I.P.E.S. : Elèves des I.P.E.S.
E : Etudiants
D : Personnel autre que les certifiés et enseignement privé
Et : Etrangers

CANDIDATS

	U	C	T	A	PC	CO	CPR	IPES	E	D	Et	
Inscrits	28	16	27	72	289	106	265	126	167	112	22	1 230
Admissibles	27	16	21	23	45	25	51	53	41	8	4	314
Admis	20	15	16	9	9	7	25	22	17	0	3	143

CANDIDATES

	S	F	T	A	PC	CO	CPR	IPES	E	D	Et	
Inscrites	23	31	6	22	193	6	235	108	70	69	0	763
Admissibles	23	30	2	8	21	3	32	27	18	0	0	164
Admis	19	25	2	4	7	1	10	12	6	0	0	86

REPARTITION DES CANDIDATS SUIVANT LES CENTRES

CANDIDATS

Centres / Candidats	AIX-MARSEILLE	AMIENS	BESANÇON	BORDEAUX	CAEN	CLERMONT	DIJON	GRENOBLE	LILLE	LIMOGES	LYON	MONTPELLIER
Inscrits	40	19	29	52	20	20	29	50	132	13	79	46
Ont composé	36	16	26	43	16	18	26	43	107	12	72	41
Admissibles	9	5	7	16	5	9	5	11	17	1	9	10
Admis	3	2	2	6	0	4	1	6	5	1	3	2

Centres / Candidats	NANCY	NANTES	NICE	ORLEANS	PARIS	POITIERS	REIMS	RENNES-BREST	ROUEN	STRASBOURG	TOULOUSE	ETRANGER
Inscrits	36	17	29	23	291	40	22	39	37	47	41	79
Ont composé	31	10	27	19	263	35	17	36	33	40	35	63
Admissibles	7	1	6	8	123	11	4	11	6	9	4	20
Admis	2	0	3	6	77	3	1	5	0	4	3	4

CANDIDATES

Centres / Candidates	AIX-MARSEILLE	AMIENS	BESANÇON	BORDEAUX	CAEN	CLERMONT	DIJON	GRENOBLE	LILLE	LIMOGES	LYON	MONTPELLIER
Inscrites	23	15	20	29	14	8	19	36	60	17	46	12
Ont composé	18	11	19	22	10	8	16	29	50	14	35	11
Admissibles	1	4	1	8	2	2	1	5	13	2	4	1
Admises	0	2	0	2	2	2	1	2	6	1	1	0

Centres / Candidates	NANCY	NANTES	NICE	ORLEANS	PARIS	POITIERS	REIMS	RENNES-BREST	ROUEN	STRASBOURG	TOULOUSE	ETRANGER
Inscrites	16	12	17	12	250	14	10	32	19	29	41	12
Ont composé	13	12	13	9	230	12	8	29	17	23	37	9
Admissibles	2	3	1	3	95	2	0	6	1	3	4	0
Admises	2	1	0	0	61	0	0	3	1	1	0	0

AGES DES CANDIDATS ADMISSIBLES ET ADMIS

Année de naissance	Candidats		Candidates	
	Admissibles	Admis	Admissibles	Admises
1951	4	3	0	0
1950	26	19	21	14
1949	68	43	52	28
1948	77	34	50	29
1947	51	20	22	10
1946	33	10	10	2
1945 et avant 1945	52	14	9	3

(3 candidats, qui ont abandonné, ne se sont pas présentés au président du jury).

AFFECTATIONS DES AGREGES 1972

Sur les 140 candidats et les 86 candidates français admis :

41 + 19 ont été autorisés à faire une année supplémentaire dans une E.N.S. ou à entrer au C.N.R.S. ;

19 + 5 ont été maintenus ou détachés sur un poste d'assistant de Faculté ou d'I.U.T. ;

8 + 6 ont obtenu des chaires de classes préparatoires ;

44 + 38 ont été nommés sur des chaires de T.C. ou T.E. de Lycées ;

0 + 4 ont été désignés pour des Ecoles Normales (2 D.E. et 1 T.C.) ;

6 + 8 ont été nommés sur des chaires ordinaires de Lycée (raisons familiales) ;

19 + 4 sont partis pour l'étranger au titre de la coopération ;

2 + 0 ont opté pour l'Enseignement privé (classes préparatoires) ;

1 + 2 suivront un stage de formation professionnelle.

140 86

EPREUVES ECRITES

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

PRÉAMBULE

On rappelle qu'une droite D du plan projectif complexe Π est tangente à une conique propre C de ce plan si elle ne rencontre C qu'en un point. On dira que D est tangente à une conique dégénérée en deux droites distinctes si elle passe par le point commun à ces deux droites. On ne parlera pas de tangente à une conique dégénérée en deux droites confondues. Si A et A′ sont des points d'une conique propre, on désignera par AA′ soit la droite joignant A et A′ si ces points sont distincts, soit la tangente (unique) en A à la conique si ces points sont confondus.

Étant donné deux coniques propres Ω et C distinctes, on appelle ligne polygonale de Poncelet (en abrégé : ligne $\mathfrak{P}$) inscrite dans Ω et circonscrite à C toute suite infinie $n \longmapsto A_n$, n étant un élément de $\mathbf{Z}$ et A_n un point de Ω, telle que les droites $A_n A_{n+1}$ et $A_n A_{n-1}$ soient les deux tangentes à C, distinctes ou confondues, issues de A_n. On dira que les points A_n sont les sommets de la ligne $\mathfrak{P}$ et que A_n et A_{n+1} sont deux sommets consécutifs, qui d'ailleurs peuvent être confondus. Une ligne $\mathfrak{P}$ est un polygone de Poncelet à s sommets s'il existe un entier s, supérieur ou égal à 3, tel que l'on ait, pour tout n ($n \in \mathbf{Z}$), $A_{n+s} = A_n$, s sommets consécutifs étant distincts.

L'objet du problème est l'étude de telles lignes polygonales, la partie I étudiant directement, et indépendamment les uns des autres, des choix particuliers de Ω et C.

Les lettres X, Y, T désignent les coordonnées d'un point M de Π dans un repère projectif $\mathcal{R}$ qui est soit fixé à l'avance, soit à choisir convenablement en fonction de certaines conditions. On note Φ un faisceau linéaire ponctuel de coniques contenant Ω.

I

A. 1° Démontrer que, si Φ contient une conique dégénérée en deux droites confondues, un choix convenable de $\mathcal{R}$ permet de donner :

— à cette conique dégénérée l'équation $T^2 = 0$
— et à Ω soit l'équation $Y^2 - 2XT = 0$ (premier cas), soit l'équation $X^2 + Y^2 - T^2 = 0$ (deuxième cas), ces deux cas s'excluant mutuellement.

2° Démontrer que dans le premier cas, si C est une conique propre de Φ, il n'existe aucun polygone de Poncelet inscrit dans Ω et circonscrit à C.

3° Le repère $\mathcal{R}$ étant fixé, on prend pour Ω la conique d'équation $X^2 + Y^2 - T^2 = 0$ et pour C la conique C_λ d'équation $X^2 + Y^2 - \lambda T^2 = 0$, λ étant un nombre complexe différent de 0 et de 1.

a. Comment faut-il choisir λ pour qu'il existe au moins un polygone de Poncelet inscrit dans Ω et circonscrit à C_λ?

Le nombre entier s étant donné supérieur ou égal à 3, pour combien de valeurs distinctes de λ existe-t-il un polygone de Poncelet à s sommets inscrit dans Ω et circonscrit à C_λ?

b. Déduire de ce qui précède que, si les coniques Ω et C sont définies dans un repère quelconque par des formes quadratiques à coefficients réels et sont tangentes en deux points distincts à coordonnées réelles, un polygone de Poncelet inscrit dans Ω et circonscrit à C, s'il en existe, a au plus deux sommets à coordonnées réelles.

B. Le repère $\mathcal{R}$ est fixé; J est le point (1, 0, 0). On prend pour Ω la conique d'équation $Y^2 - 2XT = 0$ et pour C la conique C_λ d'équation $Y^2 - 2XT + \lambda YT = 0$, λ n'étant pas nul. Quel que soit λ, C_λ et Ω appartiennent à un faisceau linéaire ponctuel Φ.

1° Une représentation paramétrique rationnelle propre de $\overline{\Omega} = \Omega \setminus \{J\}$ (Ω privée du point J) est $t \longmapsto A$, les coordonnées de A étant

$$X = \frac{1}{2}t^2 \quad , \quad Y = t \quad , \quad T = 1.$$

Établir une condition $\theta(\lambda, t, t') = 0$ nécessaire et suffisante pour que la droite AA′ définie par les points de $\overline{\Omega}$ de paramètres respectifs t et t' soit tangente à C_λ.

2° *a.* On suppose $t(\lambda - 4t) \neq 0$. Établir que par le point A de paramètre t passent deux tangentes à C_λ qui recoupent $\overline{\Omega}$ en des points $A'(t')$ et $A''(t'')$, les trois paramètres t, t' et t'' étant distincts.

Calculer $\frac{t'}{\lambda}$ et $\frac{t''}{\lambda}$ en fonction de $\frac{t}{\lambda}$.

b. Démontrer que, si $\frac{4t_0}{\lambda}$ n'est pas le carré d'un entier, le point A_0 de paramètre t_0 est sommet d'une ligne $\mathfrak{L}$ de sommets distincts, inscrite dans Ω et circonscrite à C_λ.

c. Que se passe-t-il lorsque $\frac{4t_0}{\lambda}$ est le carré d'un entier?

3° On suppose $t(\lambda - 4t) \neq 0$. Établir que par le point $A(t)$ passe au moins une tangente à la conique propre C_ν du faisceau Φ ($\nu \neq \lambda$) coupant $\overline{\Omega}$ en B de paramètre u différent de t.

On pose : $\nu = \lambda\rho^2$, $\quad \lambda' = \lambda(\rho - 1)^2$, $\quad \lambda'' = \lambda(\rho + 1)^2$.

Démontrer que des deux droites BA′ et BA″ l'une est tangente à la conique $C_{\lambda'}$, et l'autre à la conique $C_{\lambda''}$.

4° Établir que, pour λ et k fixés ($k \in \mathbf{Z}$) et pour une ligne $\mathfrak{L}$ quelconque inscrite dans Ω et circonscrite à C_λ, les droites $A_n A_{n+k}$ sont, quel que soit n ($n \in \mathbf{Z}$), tangentes à une même conique de Φ que l'on précisera.

5° Existe-t-il des polygones de Poncelet inscrits dans Ω et circonscrits à C_λ?

II

La conique propre Ω et le faisceau Φ resteront fixes dans la partie II, Φ ne contenant pas de conique dégénérée en deux droites confondues. On note λ un nombre complexe quelconque.

Soit C une autre conique propre de Φ, S (resp. N) la matrice symétrique d'une forme quadratique dont l'annulation définit Ω (resp. C) dans un repère $\mathcal{R}$.

On note :

$d(\lambda)$ ou det $(N - \lambda S)$ le déterminant de la matrice $N - \lambda S$;

C_λ la conique d'équation $\det\left[(X\ Y\ T)\,(N - \lambda S)\begin{pmatrix}X\\Y\\T\end{pmatrix}\right] = 0$;

Γ la cubique, dite de Cayley, d'équation $\mu^2 = d(\lambda)$ dans le plan affine complexe P rapporté à un repère fixe, où λ et μ sont les coordonnées d'un point.

Dans une complétion projective $\widehat{P}$ de P, où ω est le point à l'infini de l'axe des μ, on considère $\widehat{\Gamma} = \Gamma \cup \{\omega\}$.

1° La cubique $\widehat{\Gamma}$ dépend, pour Ω et C fixées, du choix de $\mathcal{R}$, S et N. Comment se transforme-t-elle si on change $\mathcal{R}$, ou S, ou N? Établir que le nombre de ses points doubles ne dépend que de Φ. A quelle condition doit satisfaire Φ pour que $\widehat{\Gamma}$ soit sans point double?

Jusqu'à la question II, 6° incluse la cubique $\widehat{\Gamma}$ *est supposée sans point double.* Toute droite de $\widehat{P}$ rencontre donc $\widehat{\Gamma}$ en trois points distincts ou non.

2° Si m et m' sont des points de $\widehat{\Gamma}$, mm' désigne soit la droite joignant m et m' si ces points sont distincts, soit la tangente (unique) en m à $\widehat{\Gamma}$ si ces points sont confondus. La droite mm' recoupe $\widehat{\Gamma}$ en un point m''. Au couple (m, m') on associe le point, noté $m + m'$, où la droite $\omega m''$ recoupe $\widehat{\Gamma}$.

En admettant sans démonstration qu'elle est associative, établir que la loi de composition interne ainsi définie munit $\widehat{\Gamma}$ d'une structure de groupe commutatif (ce qui justifie pour cette loi la notation additive).

Montrer que, Ω et C étant fixées, les groupes $(\widehat{\Gamma}, +)$ correspondant aux différents choix de $\mathcal{R}$, S et N sont deux à deux isomorphes.

3° *a.* Montrer qu'un choix convenable du repère et des formes quadratiques définissant Ω et C permet de supposer :

$$N = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -1 \\ \beta & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{C}^3,\ \det N \neq 0.$$

La cubique $\widehat{\Gamma}$ est alors fixée.

On désigne par f l'application de $\widehat{\Gamma}$ dans Φ définie par :

$f(m) = \Omega$ pour $m = \omega$,

$f(m) = C_\lambda$ pour m point d'abscisse λ de Γ.

Le point I (0, 0, 1) est un point de base de Φ. Chaque conique $f(m)$ possède en I une tangente bien déterminée, qui coupe Ω en I et en un point $g(m)$ éventuellement confondu avec I.

b. Soit λ_1, λ_2, et λ_3 trois nombres complexes. Établir une condition $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ nécessaire et suffisante pour que ces trois nombres soient les abscisses de trois points m_1, m_2 et m_3 de Γ vérifiant la relation $m_1 + m_2 + m_3 = \omega$.

c. Démontrer que, si m_1, m_2 et m_3 sont trois points de $\widehat{\Gamma}$ vérifiant la relation $m_1 + m_2 + m_3 = \omega$, alors la droite $g(m_1)g(m_2)$ est tangente à la conique $f(m_3)$.

4° Soit c l'un des points de Γ dont l'image par f est C. Démontrer que les deux tangentes à C menées par le point $g(m)$ de Ω sont les deux droites $g(m)g(m + c)$ et $g(m)g(m - c)$.

5° On considère dans cette question les lignes $\mathfrak{L}$ inscrites dans Ω et circonscrites à C.

a. Établir que, s'il existe une ligne $\mathfrak{L}$ périodique de plus petite période strictement positive *s*, alors toute ligne $\mathfrak{L}$ est périodique de plus petite période strictement positive *s*. Ces lignes sont-elles des polygones de Poncelet? Que se passe-t-il, selon la parité de *s*, pour une ligne $\mathfrak{L}$ périodique admettant pour sommet un point de base de Φ ou un point de contact d'une tangente commune à Ω et C?

b. Dans le cas où il n'existe aucune ligne $\mathfrak{L}$ périodique, démontrer que les sommets d'une ligne $\mathfrak{L}$ sont distincts, sauf dans certains cas que l'on précisera.

c. Démontrer que, pour un entier k fixé et pour toute ligne $\mathfrak{L}$, les droites $A_n A_{n+k}$ sont, quel que soit n ($n \in \mathbf{Z}$), tangentes à une même conique de Φ que l'on précisera.

6° *a.* Dans le faisceau Φ existe-t-il des coniques C_λ dont trois tangentes forment un triangle inscrit dans Ω?

En se plaçant dans les hypothèses du II, 3°, *a*, établir une condition, portant sur α, β et γ, d'existence de lignes $\mathfrak{L}$ de période 3 inscrites dans Ω et circonscrites à C.

b. Dans le faisceau Φ existe-t-il des coniques C_λ dont quatre tangentes forment un quadrangle inscrit dans Ω?

En se plaçant dans les hypothèses du II, 3°, *a*, établir une condition, portant sur α, β et γ, d'existence de lignes $\mathfrak{L}$ de période 4 inscrites dans Ω et circonscrites à C.

7° *On suppose dans cette question que la cubique $\hat{\Gamma}$ a un point double.*

Démontrer que dans ce cas il n'existe pas de droite de $\hat{P}$ incluse dans $\hat{\Gamma}$. Que deviennent les résultats des cinq questions précédentes?

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES GENERALES

Le texte est certainement long. Mais cette longueur s'explique en partie par le souci de présenter le sujet adopté de façon à ne pas faire de lui une énigme et à établir une progression lente de l'étude, qui sépare et gradue les difficultés en commençant par une application directe de définitions ou de propriétés fondamentales. Il veut s'adresser aux candidats capables d'aller de l'avant en s'appuyant sur une bonne assimilation des notions élémentaires et sur un raisonnement logique rigoureux et sûr.

Cependant l'examen des tableaux de répartition des notes attire l'attention sur le pourcentage anormalement élevé à ce niveau des copies extrêmement faibles. Sur 1 062 candidats et 655 candidates présents, 20,8 pour cent ont eu zéro, (copies blanches ou réduites à quelques phrases), 8 pour cent environ ont eu 1 ou 2, (ce qui signifie quelques résultats extrêmement simples du type : distinction entre différentes formes de faisceaux, établissement d'une condition de contact, etc.). Même en écartant ces copies, la moyenne reste insuffisante malgré un barème généreux, tenant largement compte de la longueur de l'énoncé. La médiocrité est telle que, pour être classé parmi les candidats honorables, il suffit d'établir en la discutant la condition de contact entre AA' et C_λ (I - B, 1° d 2° a) et traiter la mise en équation réduite d'un faisceau de coniques (I - A, 1°) ou la transformation de $\hat{\Gamma}$ par changement de $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, N (deux premières lignes de II 1°).

Aussi les correcteurs de cette épreuve sont-ils en droit de déplorer, comme déjà en 1972 d'ailleurs :

- l'ignorance par la majorité des candidats des premières notions de géométrie projective ou des faisceaux de coniques, bien que le programme comporte explicitement : espaces projectifs, coordonnées homogènes, faisceaux linéaires de coniques ;

- la maladresse et l'incorrection des méthodes - même si le résultat est parfois exact - et un mépris trop fréquent des enchaînements logiques ;
- la mauvaise qualité de la rédaction, la négligence de la présentation matérielle de trop nombreuses copies, l'imprécision ou même l'incorrection du langage, les fautes d'orthographe ou de français, d'étonnantes faiblesses de calcul (par exemple équation de AA' non symétrique en t et t').

Devant la médiocrité de tels brouillons, qui pose un problème inquiétant sur le plan professionnel - les candidats sont ou seront-ils plus exigeants pour leurs élèves que pour eux-mêmes ? - les examinateurs ont le devoir d'être sévères et en contre-partie ils n'hésitent pas à récompenser un travail précis, rédigé clairement et présenté avec soin.

Est-il encore nécessaire à ce niveau de conseiller aux candidats :

- de garder leur sang-froid et de ne pas foncer trop vite en négligeant d'assurer solidement leurs bases, dans l'intention louable, mais trop souvent déçue, d'aller très loin ;
- de **lire** l'énoncé avec attention, d'une part pour se placer bien dans le cadre fixé par le problème (ici, celui de la géométrie projective), d'autre part pour tirer convenablement parti des indications données.

Faut-il leur rappeler aussi qu'un texte d'examen est normalement un plan de travail progressif et qu'une mise au point précise, une discussion minutieuse, puis une rédaction claire de la solution d'une question facilitent grandement son application dans la suite de l'étude.

Partie I

Les correcteurs ont naturellement accepté le recours à des modèles affines à condition que des justifications suffisantes soient fournies. Mais, en utilisant des notions métriques (paraboles, cercles, axes de symétrie, foyers...) ou en se limitant sans raison apparente à des éléments réels (condition $\lambda < 1$, ou, sans que l'on sache pourquoi $|\lambda| < 1$), trop de candidats donnent l'impression de n'avoir pas réalisé vraiment la situation que leur présente le texte.

La question I - A, 1° demande de déterminer un repère bien adapté à l'étude de la figure formée par une conique propre et une droite, suivant le nombre de leurs points communs. Elle est correctement traitée dans une faible partie seulement des copies (15 % chez les candidates). Outre des idées fausses sur les faisceaux linéaires, beaucoup d'imprécisions apparaissent sur la définition même d'un repère ; une simple affirmation, à l'aide de «on peut», est suspecte lorsqu'elle n'est pas accompagnée d'une preuve et il est bien plus clair de placer avec précision tel ou tel sommet du repère. Quant au «point unitaire», dont l'introduction pouvait d'ailleurs être remplacée par des changements simples sur les vecteurs de base, il est rarement choisi avec netteté.

La rédaction des questions I-A, 2° et I-A, 3° peut être facilitée par l'utilisation d'un paramétrage des droites ou des coniques, tel que celui donné en B-1° par exemple.

La partie B est assez largement traitée. Mais que de maladresses à propos de calculs qui devraient être triviaux ; établir l'équation d'une droite en géométrie projective (des formules non homogènes sont données), discuter le nombre des tangentes (lié souvent au «signe de Δ»), reconnaître que tel nombre est solution de telle équation soulèvent, semble-t-il, des difficultés insoupçonnées ! Dans B-1°, la recherche de la condition $\theta(\lambda, t, t') = 0$ est souvent faite par des méthodes excluant l'égalité de t et t', sans que ce dernier cas soit étudié, et le caractère nécessaire et suffisant de cette relation n'est pas mis en évidence ; beaucoup de candidats paraissent à ce sujet ne pas savoir qu'une conique propre est unicursale ou possède des équations tangentielles.

Dans B, 2° et B, 3°, l'hypothèse $t(\lambda - 4t) \neq 0$ est rarement comprise et les calculs demandés sont le plus souvent maladroits, voire malhonnêtes (l'emploi du symbole $\sqrt{}$ portant sur une variable complexe rend particulièrement douteuses certaines vérifications portant sur des sommes de radicaux).

Quand elle est abordée, la question B, 4° est correctement traitée ; elle permet de résoudre B, 5°.

Partie II

Une matrice d'application linéaire et une matrice de forme bilinéaire ne se transforment pas de la même façon par changement de base ; ceci ne saurait être ignoré.

Dans 2°, la justification rigoureuse de l'isomorphisme des groupes $(\widehat{\Gamma}, +)$ doit faire appel à l'invariance du point ω.

Dans 3°, le choix du repère est lié à l'existence d'un point I commun à Ω et C, où les tangentes à ces deux coniques sont distinctes; la condition $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ est très rarement obtenue.

Pour les questions suivantes, les candidats ont le plus souvent fourni des affirmations, plutôt que des justifications rigoureuses.

Au 7°, signalons que la cubique $\widehat{\Gamma}$ est unicursale, et qu'une structure de groupe analogue à celle du 2° peut être établie sur $\widehat{\Gamma}$ privée de son point double.

Pour terminer, citons quelques fautes relevées sur les copies, qu'explique certes l'affolement des candidats, mais que les correcteurs souhaiteraient tout de même ne pas trouver au niveau du concours d'agrégation :

- une équation de conique dans le plan projectif contenant dix coefficients :
  $AX^2 + \ldots + 2\,BYT + \ldots + 2CX + 2C'Y + 2C''T + D = 0$;
- une équation du second degré ayant quatre solutions explicitées ;
- un nombre complexe admettant une infinité de racines carrées ;
- un groupe infini où tout élément admet pour symétrique l'élément neutre ;
- on peut toujours, connaissant 2α, trouver un entier s tel que $2s\alpha$ soit multiple de 2π ;
- toutes les coniques d'un faisceau ont même genre ;
- « il est impossible de trouver deux points A_1, A_2 de Ω tels que $A_1 A_2$ soit tangente à C, car on arrive à une équation analogue à l'inégalité de Schwarz, ce qui donne $A_1 = A_2$ (la copie ne contient pas d'autre explication) » ;
- « pour que la conique dégénérée ait pour équation $T^2 = 0$, il suffit de choisir le plan des deux droites qui la composent pour plan OX, OY ; et Ω a l'équation $Y^2 = 2XT$ ou $X^2 + Y^2 = T^2$, il suffit pour cela de choisir les deux droites de la conique décomposée pour axes de Ω ».

Répartition des notes

Agrégation masculine : 1 062 copies

n = 0	0<n≤4	4<n≤8	8<n≤12	12<n≤16	16<n≤20	20<n≤24	24<n≤28	28<n≤32	32<n
20,8 %	16,3 %	19,5 %	13,0 %	9,6 %	8,1 %	5,8 %	2,3 %	2,3 %	2,3%

Agrégation féminine : 655 copies

n = 0	0<n≤5	5<n≤10	10<n≤15	15<n≤20	20<n≤25	25<n≤30	30<n≤35	35<n≤40	40<n≤45	45<n
136	95	98	91	93	67	33	23	7	7	5

ANALYSE

On désigne :

— par $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{N}$) l'ensemble des entiers relatifs (resp. naturels);

— par (x_1, x_2, x_3) le point courant de $\mathbf{R}^3$;

— par $\mathbf{R}_1$ [resp. $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$] le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(x_1, 0, 0)$ [resp. $(0, x_2, 0)$ et $(0, 0, x_3)$];

— par (z, x_3) le point courant de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{C}_1$ étant le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(z, 0)$.

On identifie $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^3$ par la relation $(z, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ avec $z = x_1 + ix_2$.

Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbf{R}^n$, $A + B$ désigne l'ensemble des vecteurs $X + Y$, où X parcourt A et Y parcourt B.

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et ω une partie de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables sur Ω et $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$ la partie de $\mathcal{D}(\Omega)$ constituée par celles qui s'annulent sur ω; pour $n = 3$, $H(\Omega)$ est formé par les fonctions f de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que, pour tout nombre c réel, la fonction partielle $z \longmapsto f(z, c)$ soit holomorphe sur la section de Ω par le plan d'équation $x_3 = c$; la dérivée de cette fonction sera notée $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

I

On désigne par S l'ensemble des suites doubles $\mathbf{a} = (a_{p,q})$ à valeurs complexes indexées par $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. Étant donné $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans S, $\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ désignera l'ensemble des suites $\mathbf{c}$ de S vérifiant pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$:

$$c_{p+1,q} = a_{p,q}\, c_{p+2,q+1} + b_{p,q}\, c_{p,q+2}.$$

1° Soit k un entier donné quelconque dans $\mathbf{N}$. Démontrer l'existence de fonctions $\Gamma_{i,j,k}$ polynomiales des $a_{p,q}$ et $b_{p,q}$, à coefficients positifs, et telles que pour tout $\mathbf{c}$ dans $\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ on ait :

$$c_{0,0} = \sum_{\substack{i+2j=3k \\ k \leqslant j \leqslant 2k}} \Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\, c_{i,j}.$$

2° Soit $\mathbf{a}' = (a'_{p,q})$ et $\mathbf{b}' = (b'_{p,q})$ deux suites à valeurs réelles de S, telles que pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ vérifiant $|p + 1| \leqslant q$, on ait :

$$|a_{p,q}| \leqslant a'_{p,q} \qquad \text{et} \qquad |b_{p,q}| \leqslant b'_{p,q}.$$

Démontrer alors : $|\Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leqslant \Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$.

3° Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ la suite de S définie par $\varepsilon_{p,q} = \dfrac{\alpha}{q+1}$ $(\alpha \in \mathbf{C},\ \alpha \neq 0)$.

Vérifier l'inégalité : $|\Gamma_{i,j,k}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})| \leqslant \dfrac{|2\alpha|^k}{k!}$.

4° Soit A, λ et μ trois constantes réelles positives et $(\theta_p)_{p\in\mathbf{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|\theta_p| \leqslant 1$ pour tout p. Démontrer que, si $\mathbf{c}$ est une suite de S vérifiant les relations :

$$c_{p+1,q} = \frac{\theta_p}{q+1}\, c_{p+2,q+1} + \frac{\mu(p+1)}{(q+1)(q+2)}\, c_{p,q+2} \quad \text{et} \quad |c_{p,q}| \leqslant \lambda A^{p+2q}$$

pour tout couple $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, alors il existe un nombre M, ne dépendant que de A, λ, μ, p, q, tel qu'on ait pour tout $k \geqslant 1$

$$|c_{p,q}| \leqslant \frac{M^k}{(k-1)!}.$$

(On pourra commencer par majorer $|c_{0,0}|$, puis ramener le cas général au cas précédent par une translation des indices.)

En déduire que les $c_{p,q}$ sont nuls.

II

Le point courant de $\mathbf{R}^2$ est noté (x, y); on étudie l'opérateur différentiel $D = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \boldsymbol{a}(x) \frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{b} \frac{\partial}{\partial x}$, où $\boldsymbol{a}$ est une fonction polynomiale du premier degré à coefficients complexes et $\boldsymbol{b}$ une constante complexe.

1° Π est le demi-plan formé par les points (x, y) vérifiant $y > 0$; K est une partie bornée contenue dans Π. Démontrer que toute fonction f de $\mathcal{D}(\Pi)$, nulle en dehors de K, bornée sur K ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux et vérifiant $Df = 0$, est nulle sur Π tout entier. (Pour cela, on pourra poser pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$

$$c_{p,q} = \iint_\Pi [\boldsymbol{a}(x)]^p y^q f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{si} \quad p \geqslant 0$$

$$c_{p,q} = 0 \qquad \text{si} \quad p < 0.$$

puis montrer que la suite $\mathbf{c} = (c_{p,q})$ vérifie les conditions du I 4° et en déduire le résultat).

2° Ω et ω sont deux ouverts convexes non vides de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $\omega \subset \Omega \subset \omega + \mathbf{R}_2$ et $\omega \neq \Omega$;

$\complement \omega$ désigne le complémentaire de ω dans $\mathbf{R}^2$. Soit dans $\mathbf{R}^2$ une parabole $\mathcal{P}$ d'axe parallèle à $\mathbf{R}_2$ et d'équation

$$\varphi(x, y) = \alpha y - (x^2 + \beta x + \gamma) = 0;$$

$\mathcal{P}_i$ désigne l'intérieur de la parabole, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \varphi(x, y) > 0\}.$$

a. Soit M un point donné dans $\Omega \cap \complement \omega$; démontrer qu'on peut choisir $\mathcal{P}$ de façon que M appartienne à $\mathcal{P}_i$ et que la composante connexe δ de $\mathcal{P}_i \cap \complement \omega$ contenant M soit relativement compacte et contenue dans Ω. $\mathcal{P}$ est ainsi choisie dans la suite.

b. Soit v une fonction de $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$. Démontrer que la fonction $\tilde{v}$, qui est nulle en dehors de δ et coïncide avec v sur δ, appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{P}_i)$.

c. Soit Φ l'application : $(x, y) \longmapsto (x, \varphi(x, y))$. Démontrer que l'application $g \longmapsto g \circ \Phi$ définit une bijection de $\mathcal{D}(\pi)$ sur $\mathcal{D}(\mathcal{P}_i)$.

Expliciter en fonction de (α, β, γ) l'opérateur différentiel $\tilde{D}$ tel que pour tout g de $\mathcal{D}(\pi)$ on ait : $D(g \circ \Phi) = (\tilde{D} g) \circ \Phi$.

3° Déduire des questions précédentes que D est un opérateur injectif sur $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$.

4° Démontrer que ce résultat subsiste pour l'opérateur

$$D_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \boldsymbol{b} \frac{\partial}{\partial x}.$$

III

On étudie l'opérateur différentiel $\Delta = \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$ défini sur les ensembles H (Ω) introduits dans le préambule.

Soit M un point (ζ, c) donné dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° Soit α un nombre complexe.

a. Démontrer que l'équation $\Delta u = 0$ a dans $H(\mathbf{C} \times \mathbf{R})$ une solution unique de la forme $\Psi(z)e^{\alpha x_3}$ et satisfaisant à $u(\zeta, c) = 1$. On appelle U_n cette solution pour $\alpha = \sqrt{n}\, e^{i\theta}$ $(n \in \mathbf{N},\ \theta$ réel donné).

b. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} U_n$ converge uniformément et absolument sur tout compact d'un demi-espace ouvert P_θ ayant M comme point frontière, et que la somme s de cette série est une fonction de $H(P_\theta)$ vérifiant $\Delta s = 0$.

c. Démontrer que s n'est pas bornée au voisinage de M.

2° Soit P le plan d'équation $x_2 = 0$ et $\tilde{\Delta}$ l'opérateur $\frac{\partial}{\partial x_1} - i \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$. Étant donné un demi-plan Π_1 de P, dont la frontière est parallèle à $\mathbf{R}_1$ ou $\mathbf{R}_3$, et un point M de cette frontière, démontrer qu'il existe une fonction h de $\mathcal{D}(\Pi_1)$ non bornée au voisinage de M et vérifiant $\tilde{\Delta} h = 0$.

IV

On suppose que Ω est une partie non vide, ouverte et convexe de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° *a.* Démontrer que, si A est une partie convexe de Ω ayant plus d'un point et contenue dans un plan parallèle à $\mathbf{C}_1$, alors toute fonction de H(Ω), qui s'annule sur A, s'annule aussi sur $(A + \mathbf{C}_1) \cap \Omega$.

b. Démontrer que, si B est une partie convexe de Ω contenue dans le plan d'équation $x_2 = a$ et formant un ouvert non vide de ce plan, alors toute fonction u de H (Ω), qui s'annule sur B et vérifie $\Delta u = 0$, s'annule nécessairement sur $(B + \mathbf{R}_3) \cap \Omega$.

2° Démontrer que deux points quelconques de Ω peuvent être joints par une ligne polygonale dont les côtés sont parallèles soit à $\mathbf{C}_1$, soit à $\mathbf{R}_3$.

3° On suppose que la partie ω de Ω est un ouvert non vide, convexe, borné du plan P d'équation $x_2 = 0$; $\mathcal{E}(\Omega)$ [resp. $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$] désigne l'ensemble des solutions dans H(Ω) [resp. $\mathcal{D}(\omega)$] de l'équation $\Delta u = 0$ [resp. $\tilde{\Delta} w = 0$] Pour tout u de H(Ω), $\tilde{u}$ est la restriction de u à ω.

Démontrer que l'application $u \longmapsto \tilde{u}$ est une injection de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$.

Démontrer, à l'aide des résultats de la partie III, que cette application n'est pas surjective.

COMPOSITION D'ANALYSE

Le problème est inspiré par un article d'Hörmander, traitant les propriétés de l'opérateur D dans le cas plus général où a et b sont des fonctions analytiques. La partie I du problème constitue un préliminaire établissant aisément ces propriétés avec les hypothèses restrictives faites sur a et b. Les parties III et IV ont pour objet de prouver que l'application $u \to \tilde{u}$ n'est pas surjective. On peut affirmer, hélas !, que l'idée générale du problème échappe, à quelques dizaines près, à la totalité des candidats ; le fait de prendre du recul et de voir cette étude dans son ensemble reste la marque des copies vraiment bonnes.

La longueur du problème a été compensée, selon la coutume, par un barème assez large, accordant une centaine de points à la copie idéale. Ce barème a tenu compte des négligences matérielles qui se sont glissées dans le texte, puisque l'ensemble des deux premières parties était coté pour cinquante-cinq points environ, et les copies, qui sur les points litigieux ont manifesté quelque embarras, ont été jugées et notées avec indulgence. Responsable en partie de l'étirement du texte, la décomposition des difficultés, donc des questions, provoquée par le souci de guider les candidats, a conduit à une répartition plus ponctuelle des notes et à un classement plus fin. Finalement, aucun candidat n'ayant donné une solution complète du problème, les correcteurs ont obtenu un étalement continu des notes entre 0 et 60. Des points supplémentaires étaient par ailleurs prévus pour récompenser une démonstration habile, une présentation soignée ou une rédaction montrant une bonne compréhension du rôle joué par la question traitée. Toutefois, bien des candidats ont pu dans ces conditions glaner beaucoup de points dans les questions faciles, malgré, – et l'oral l'a révélé – des connaissances assez médiocres en analyse.

REMARQUES GENERALES

- Alors que la partie I, qui met en place la très classique méthode des séries majorantes, ne nécessite que des connaissances fort réduites, trop de candidats se sont enlisés dans des discours trop vagues ou des considérations interminables, faute d'un effort de réflexion pour dégager les idées simples permettant de rédiger une solution simple (Cf plus bas).
- Dans la partie II, une trop grande désinvolture vis-à-vis des justifications de calcul coûte de nombreux points à de nombreux candidats.
- La partie III, malgré le caractère élémentaire et classique des questions posées, souvent d'un honnête niveau de MP2, semble avoir constitué un obstacle insurmontable. Ne voit-on pas certains candidats ne pas savoir intégrer une équation différentielle linéaire du premier ordre !
- Les parties non triviales de la partie IV n'ont pratiquement pas été abordées.

Partie I

1°, 2° et 3° - Ces trois questions sont traitées par la majorité des candidats, mais trop souvent au prix de développements bien filandreux. Il suffit pourtant de noter que les coefficients $\Gamma_{i,j,k}$ sont combinaisons linéaires d'au plus deux $\Gamma_{i,j,k-1}$ avec des coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ tels que $i + 1 + 2j = 3k$, $k \leqslant j \leqslant 2k$

Un certain nombre de candidats omettent de vérifier que l'expression de $\Gamma_{i,j,k}$ en fonction des $a_{i,j}$ et des $b_{i,j}$ ne fait intervenir que des couples (i,j) satisfaisant à $|i+1| \leqslant j$, et cette remarque est nécessaire pour répondre correctement à la deuxième question. Indiquons aussi que le fait de prouver dans un raisonnement par récurrence que la propriété à démontrer est vraie pour $k = 0, 1, 2$ (et parfois 3, voire 4) n'apporte aucun point supplémentaire au candidat !

4° - Un nombre déjà plus restreint de candidats savent montrer l'inégalité $|c_{o,o}| \leqslant \lambda \dfrac{(k+1)M^k}{k!}$. D'autres, pour obtenir plus rapidement la majoration proposée par l'énoncé, affirment froidement qu'il y a k entiers j vérifiant $k \leqslant j \leqslant 2k$. Etant arrivés tant bien que mal à prouver $|c_{o,o}| \leqslant \lambda \dfrac{M_o^k}{(k-1)!}$, certains posent $M = \lambda^{\frac{1}{k}} M_o$ pour montrer l'existence d'une «constante» M telle que l'on ait $|c_{o,o}| \leqslant \dfrac{M^k}{(k-1)!}$. Signalons que, le but de la question étant de montrer $c_{o,o} = 0$, la première majoration obtenue suffit, et que l'emploi de la formule de Strirling pour vérifier $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{M^k}{k!} = 0$ manque de simplicité.

Enfin, pour démontrer la nullité de c_{p_o, q_o} pour tout p_o et tout q_o positifs ou nuls, il convient d'introduire la suite $\gamma_{p,q} = \gamma_{p+p_o, q+q_o}$ et de vérifier qu'elle satisfait une relation de récurrence analogue, avec des coefficients encore majorés par $\beta(q+1)^{-1}$, où β est une constante bien choisie.

Partie II

1° - De nombreuses copies sautent le II 1° assez délicat. Parmi les autres, certaines prennent les $c_{p,q}$ pour des fonctions qu'elles dérivent hardiment. Ce n'est qu'exceptionnellement que Fubini est évoqué. Les valeurs de μ et θ_p pour $p \geqslant 0$ sont rarement exactes, celles de θ_p pour $p < 0$ figurent dans un très petit nombre de copies.

En partant de l'égalité $\iint_{\Pi} (a(x))^{p+1}\, y^{q+2}\, Df(x,y)\, dx\, dy = 0$ et en procédant par intégrations par parties successives, on obtient une relation de récurrence entre les $c_{p,q}$ analogue à celle étudiée en I - 4° (avec $\theta_p = 1$), valable pour $p = -1$ et $p \geqslant 0$. Encore faut-il montrer soigneusement qu'à chaque intégration par parties le terme tout intégré est nul. Pour les termes du type $[a(x) f(xy)]_{x=-\infty}^{x=+\infty}$, cela résulte immédiatement du fait que f est nulle en dehors de K. Par contre, pour ceux du type $[y^q \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]_{y=o}^{y=+\infty}$ ou $[y^q f(x,y)]_{y=o}^{y=+\infty}$, il est essentiel d'indiquer que dans le cas $q \geqslant 1$ leur nullité résulte non seulement de la nullité de f hors de K, mais aussi de ce que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont supposées bornées. De nombreux candidats pensent que K est un compact de Π (auquel cas la condition que f soit nulle hors de K suffirait). Cette même erreur conduit ces candidats à approximer uniformément sur K la fonction f par une suite de polynômes. Il faut, en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des combinaisons linéaires des fonctions $(a(x))^p y^q$ permet d'approximer uniformément sur K n'importe quelle fonction continue φ sur $\mathbb{R}^2$ (ne pas omettre à ce propos que $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$) ; ceci fait et compte tenu de ce que f est bornée sur K, on en déduit $\iint_{\Pi} f(x,y)\ \varphi(x,y)\, dx,\, dy = 0$. Montrer alors que f est nulle fait appel à un raisonnement bien classique.

Pour en terminer avec cette question, signalons qu'il convient aussi de poser $\theta_p = 1$ pour $p \neq -2$ et $\theta_{-2} = 0$, pour obtenir une relation de récurrence entre les $c_{p,q}$ valable dans tous les cas. Disons aussi qu'un nombre, hélas non négligeable de copies affirme que la nullité de $\iint_{\Pi} f(x,y)\, dx\, dy$ entraîne celle de f !!

2° - Il faut lire dans l'énoncé que ω et Ω sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et non de $\mathbb{R}_2$; la suite du problème rend d'ailleurs claire la nécessité de cette modification. Néanmoins le jury s'est montré très large sur cette question assez intuitive, mais tout de même assez longue à rédiger rigoureusement.

La partie b) révèle que beaucoup de candidats ne savent pas que, pour prouver la différentiabilité d'une fonction sur un ouvert U, il suffit de prouver sa différentiabilité sur deux ouverts dont la réunion est U. Quant à la partie c), elle recèle de nombreuses erreurs dans le calcul de $\tilde{D}$ et met en lumière les ravages que peut causer un formalisme excessif. Ainsi de nombreux candidats ne bénéficient pas des points que devrait leur valoir une question aussi simple.

3° et 4° - Il suffit de montrer qu'on peut toujours se ramener, en vertu de la question précédente, à l'étude de l'opérateur D étudié au 1° et en particulier qu'il est toujours possible de faire en sorte que le degré de $\alpha a(x) - 2bx - 2b\beta$ soit effectivement égal à 1.

Partie III

Elle réclame l'application de théorème précis sur les séries de fonctions holomorphes et différentiables. Dans bien des cas, l'équation différentielle est résolue formellement sans qu'on se pose des questions sur le logarithme complexe ainsi introduit.

1° - La plupart des candidats ayant abordé cette question ont rectifié l'erreur d'impression figurant dans l'énoncé. La partie b) montre que le théorème permettant la dérivation terme à terme d'une série est trop souvent ignoré au moment où il conviendrait de l'utiliser (dans le cas présent, pour dériver par rapport à x_3).

Peut-être effrayés par l'étude d'une série de terme général exp. $(-n\rho\alpha+\beta\sqrt{n})$, où on a $\rho\alpha > 0$, des candidats ne craignent pas d'introduire, comme domaine de définition de la série ΣU_n, un demi-espace... dépendant de n !!

La question c) se ramène à l'étude d'une série géométrique en se restreignant au cas $x_3 = c$ ce que n'a vu aucun candidat, et les démonstrations sont fausses dans un grand nombre de copies.

2° - Cette question n'est pratiquement pas abordée. Le cas où la frontière de Π_1 est parallèle à $\mathbb{R}_3$, se ramène immédiatement à l'étude faite en 1° c), après un choix convenable de θ. Lorsque cette frontière est parallèle à $\mathbb{R}_1$, on est ramené à prouver que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|x_3-c|\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ lorsque $|x_3-c|$ tend vers 0.

Partie IV

1° - La question a), assez simple, est souvent menée à bien par les candidats l'ayant abordée. Sa résolution dépend du théorème bien classique «du prolongement analytique» parfois mal connu ou mal appliqué.

Il n'en est pas de même de la partie b) qui nécessite l'utilisation du résultat prouvé en II 4°.

2° - L'aspect géométrique de cette question retient l'attention d'un certain nombre de candidats et les démonstrations proposées sont variées et intéressantes ; le résultat demandé est par ailleurs bien classique.

3° - Pour prouver l'injectivité de l'application $u \to \tilde{u}$, on peut utiliser la question précédente ou plus simplement prouver qu'est non vide l'intérieur Ω_0 de l'ensemble des points de Ω où s'annule u et que u est nulle sur tout cube ouvert Γ contenu dans Ω et contenant un cube ouvert Γ_0 sur lequel u s'annule.

Enfin, pour montrer que $u \to \tilde{u}$ n'est pas surjective, il convient de prouver l'existence de solutions non bornées au voisinage d'un demi-plan, en utilisant les résultats démontrés en III 2°.

Répartition des notes

Agrégation masculine : 979 copies

n = 0	0<n⩽4	5⩽n⩽9	10⩽n⩽14	15⩽n⩽19	20⩽n⩽24	25⩽n⩽29	30⩽n⩽34	35⩽n⩽39	40⩽n⩽44	45⩽n⩽49	50⩽n
72	117	104	163	162	115	90	55	34	30	21	16

Agrégation féminine : 612 copies

n = 0	1⩽n⩽4	5⩽n⩽9	10⩽n⩽14	15⩽n⩽19	20⩽n⩽24	25⩽n⩽29	30⩽n⩽34	35⩽n⩽39	40⩽n⩽44	45⩽n⩽49	50⩽n
62	117	106	101	85	54	34	21	16	6	5	5

ANALYSE NUMÉRIQUE

I

1° On se donne, pour toute la suite, sous le nom de programme :

a. Un ensemble fini $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_u\}$ de symboles V_i $(i = 1, 2, \ldots, u)$.

Ces symboles sont les noms des *mémoires* : une mémoire est une case dans laquelle on admettra pouvoir ranger un nombre rationnel quelconque $x \in Q$;

b. Un ensemble fini $S = \{S_1, S_2, \ldots, S_r\}$ de symboles S_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Ces symboles servent à désigner les *instructions* (pas élémentaires du calcul);

c. Un ensemble d'instructions :

2° Une *instruction*, désignée par S_j, sera de l'un des quatre types suivants :

Type 1 (instruction arithmétique) :

$$S_j : V_{i_3} := V_{i_1} \tau V_{i_2} ; m$$

où

τ est l'un des 4 opérateurs arithmétiques :

$+$ addition dans Q
$-$ soustraction dans Q
$\times$ multiplication dans Q
$\div$ division dans Q,

j et m sont des entiers tels que $j + m$ et j soient entre 1 et r (m peut être négatif),
i_1 i_2 i_3 sont des entiers entre 1 et u.

L'instruction S_j s'exécute alors, par définition, de la manière suivante :

On considère le contenu (nombre rationnel) des mémoires V_{i_1}, V_{i_2}; on compose ces contenus selon l'opération τ; on range le résultat dans la mémoire V_{i_3}; on passe alors, pour l'exécuter, à l'instruction S_{j+m}.

Type 2 (affectation d'une valeur rationnelle) :

$$S_j : V_{i_1} := x; m \qquad (j, j + m \text{ entiers entre } 1 \text{ et } r)$$
$$(i_1 \text{ entier entre } 1 \text{ et } u).$$

On place dans la mémoire de nom V_{i_1} le nombre $x \in Q$ et l'on passe à l'instruction S_{j+m}.

Type 3 (test de signe) :

$$S_j : V_{i_1}; m_1, m_2.$$

On compare à $0 \in Q$ le contenu de V_{i_1}; si celui-ci est plus grand que 0, la suite du programme est prise en S_{j+m_1}; si celui-ci est inférieur ou égal à zéro, la suite est en S_{j+m_2} ($j + m_1$ et $j + m_2$ entre 1 et r).

Type 4 (Arrêt) :

$$S_j : \text{Arrêt.}$$

Cette instruction signifie que le calcul est terminé : on ne modifie le contenu d'aucune mémoire, et on ne passe pas à une autre instruction.

On définira *un programme* en écrivant une liste finie d'instructions, dans l'ordre croissant des indices des S_j (ce qui ne signifie pas qu'il s'exécutera dans cet ordre). La première instruction sera toujours désignée par S_1.

Q 1. On demande ce qu'exécute, d'après les règles précédentes, le programme suivant, sur le contenu x de V_1 :

$S_1 : V_1 ; 3, 1$
$S_2 : V_2 := -1 ; 1$
$S_3 : V_1 := V_1 \times V_2 ; 1$
S_4 : *Arrêt.*

Q 2. Si ε est un rationnel positif donné, supposé placé avant l'exécution dans V_1, on demande si le programme suivant s'arrête, et que contient V_1 à l'arrêt.

$S_1 : V_2 := 0 ; 1$
$S_2 : V_3 := 2 ; 1$
$S_3 : V_4 := V_1 + V_2 ; 1$
$S_4 : V_5 := V_1 \times V_1 ; 1$
$S_5 : V_5 := V_5 - V_3 ; 1$
$S_6 : V_5 ; 2, 1$
$S_7 : V_1 := V_1 + V_4 ; -3$
S_8 : *Arrêt.*

3° Soit P un programme utilisant $\{ V_1 \ldots V_u \}$ comme ensemble de noms de mémoires. Pour $n \leqslant u$, $P(a_1, \ldots, a_n)$ désignera, si P s'arrête, le contenu de V_1 à l'arrêt de P, lorsque initialement le contenu de V_i est a_i pour $i = 1, \ldots, n$ et nul pour $i = n + 1, \ldots, u$. Si P ne s'arrête pas, $P(a_1, \ldots, a_n)$ n'est pas défini.

On dit qu'une application f d'une partie Ω de Q^n dans Q *est programmable dans* Ω si :

1. Il existe un programme P pour lequel $P(a_1, \ldots, a_n)$ est défini si et seulement si $(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega$;

2. $P(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n)$.

Q 3. L'application $f : x \in Q \longmapsto | x | \in Q$ est-elle programmable?

Q 4. Les applications $f_i : (a, b) \in Q^2 \to a \; \tau_i \; b \in Q$, pour $\tau_1 = +$, $\tau_2 = -$, $\tau_3 = \times$, sont-elles programmables ainsi que

$$f_4 : (a, b) \in Q \times Q^* \to a \div b? \quad (Q^* = Q - \{0\}).$$

4° Prouver le théorème suivant :

Q 5. Soient $f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ et $g_i(b_1, b_2, \ldots b_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ des applications programmables; l'application composée
$h(b_1, \ldots, b_m) = f[g_1(b_1, \ldots, b_m), g_2(b_1, \ldots, b_m), \ldots, g_n(b_1, \ldots, b_m)]$ est programmable dans la partie de Q^m où elle est définie.

Comme corollaire, en déduire que, si $f(a_1, \ldots, a_n)$ et $g(a_1, \ldots, a_n)$ sont programmables, alors :

$$h(a_1, \ldots, a_n) = f(a_1, \ldots, a_n) \; \tau \; g(a_1, \ldots, a_n) \qquad (\tau = +, -, \times, \div)$$

est programmable, h étant définie dans la partie de Q^n où f et g sont simultanément définies (et, pour $\tau = \div$, telles que g ne prenne pas la valeur nulle).

Par exemple, f définie sur Q^2 par $(a, b) \in Q^2 \longmapsto Max\,(a, b) \in Q$ est-elle programmable?

II

Q^+ désigne l'ensemble des rationnels strictement positifs (> 0).

1° Une application α de Q^+ dans Q est appelée *processus calculable* si :

a. elle est programmable;

b. $\forall\, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in Q^+ \quad |\alpha(\varepsilon_1) - \alpha(\varepsilon_2)| \leqslant \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Q 6. En utilisant l'exemple de la question Q 2, montrer qu'il existe un processus calculable pour obtenir une approximation rationnelle de $\sqrt{2}$ avec une erreur inférieure ou égale à ε.

On dira qu'un processus calculable α est un *processus calculable nul* si

$$\forall\, \varepsilon \in Q^+ \quad |\alpha(\varepsilon)| \leqslant \varepsilon\,.$$

Les processus définis par $\alpha(\varepsilon) = \varepsilon$ ou $\alpha(\varepsilon) = 0$ sont évidemment des processus calculables nuls.

Q 7. Soit α un processus calculable vérifiant la propriété suivante :

Il existe $\varepsilon_0 \in Q^+$ et r rationnel, positif ou nul tels que $\varepsilon < \varepsilon_0$ entraîne $|\alpha(\varepsilon)| \leqslant r\,\varepsilon$.

Démontrer que α est un processus calculable nul.

2° Soient α et β deux processus calculables.
On pose, pour $\varepsilon \in Q^+$, $(\alpha \pm \beta)(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon/2) \pm \beta(\varepsilon/2)$.

Q 8. Prouver que $\alpha \pm \beta$ sont des processus calculables (on utilisera les résultats de Q 5). On désigne par Γ l'ensemble des processus calculables, et dans Γ on définit la relation $\sim$ par :

$$\alpha \sim \beta \Leftrightarrow [\alpha - \beta \text{ est un processus calculable nul}].$$

Q 9. Prouver que la relation $\sim$ est d'équivalence (on peut utiliser les résultats de Q 7 pour démontrer la transitivité).

Q 10. Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ avec $\alpha_1 \sim \alpha_2$ et $\beta_1 \sim \beta_2$, montrer que $\alpha_1 \pm \beta_1 \sim \alpha_2 \pm \beta_2$.

Définition : on appelle *nombre calculable* toute classe de processus calculables modulo la relation d'équivalence $\sim$. On utilisera des minuscules latines *a*, *b*, ... pour les désigner, et les minuscules grecques, α, β, ... correspondantes pour les représentants des classes ; $a = \{\alpha\}$ signifiera que *a* est la classe du processus α. L'ensemble de ces classes est noté C.

Q 11. Si $a = \{\alpha\}$ et $b = \{\beta\}$, prouver que sur C la loi d'addition : $a + b = \{\alpha + \beta\}$ est bien définie et est une loi de groupe commutatif.

3° Soient $\alpha, \beta \in \Gamma$; on pose, pour tout $\varepsilon \in Q^+$ et tout entier N strictement positif

$$\varphi(\varepsilon, N) = \big(|\alpha(\varepsilon/N)| + |\beta(\varepsilon/N)| + 2\,\varepsilon/N\big)\, 2\varepsilon/N\,.$$

Alors, pour tout $\varepsilon \in Q^+$, on a : $\lim\limits_{N \to \infty} \varphi(\varepsilon, N) = 0$.

Désignant par $N(\varepsilon)$ le plus petit entier tel que $\varphi(\varepsilon, N) \leqslant \varepsilon$, on pose :

$$(\alpha.\beta)(\varepsilon) = \alpha[\varepsilon/N(\varepsilon)]\,.\beta[\varepsilon/N(\varepsilon)].$$

Q 12. Justifier l'existence de $N(\varepsilon)$, et montrer que $\alpha.\beta$ est un processus calculable.

Q 13. Démontrer que, si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ avec $\alpha_1 \sim \alpha_2$ et $\beta_1 \sim \beta_2$, alors $\alpha_1.\beta_1 \sim \alpha_2.\beta_2$.

Q 14. Si $a = \{ \alpha \}$, $b = \{ \beta \}$, *on pose :* $a.b = \{ \alpha.\beta \}$.

Démontrer qu'on définit ainsi sur C une loi de composition commutative, associative, et distributive par rapport à la loi d'addition précédente.

4° Soient α, β deux éléments de Γ, β n'étant pas un processus calculable nul; on pose :

$$(\alpha/\beta)(\varepsilon) = \alpha[\varepsilon/M(\varepsilon)]/\beta[\varepsilon/M(\varepsilon)]$$

où $M(\varepsilon)$ est le plus petit des entiers M tels que :

i. $|\beta(\varepsilon/M)| > 2\varepsilon/M$;

ii. $(2\varepsilon/M)\big(|\alpha(\varepsilon/M)| + |\beta(\varepsilon/M)|\big) \leqslant \varepsilon\big(|\beta(\varepsilon/M)| - 2\varepsilon/M\big).|\beta(\varepsilon/M)|$.

Q 15. Justifier l'existence de $M(\varepsilon)$ *et prouver que* α/β *est un processus calculable.*

Q 16. Si $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \Gamma$ *et* $\alpha_1 \sim \alpha_2$ *et* $\beta_1 \sim \beta_2$ *(sans être équivalent aux processus nuls), alors* $\alpha_1/\beta_1 \sim \alpha_2/\beta_2$.

Q 17. Si b est un nombre calculable différent de la classe des processus nuls, on posera $a/b = \{ \alpha/\beta \}$. *Démontrer que cette loi est bien définie.*

Q 18. Prouver que les lois précédentes ($\pm, ., /$) *donnent à C une structure de corps commutatif : c'est le corps des nombres calculables. Préciser les relations avec Q : peut-on considérer Q comme partie de C?*

Q 19. Démontrer qu'on peut étendre à C la relation d'ordre $\leqslant$ *de Q.*

III

1° *Codification des programmes.*

Soit un programme P, défini par la donnée de r instructions désignées par S_j ($j = 1, \ldots, r$). A l'instruction S_j on fait correspondre 7 entiers non négatifs $S_j^1, S_j^2, S_j^3, S_j^4, S_j^5, S_j^6, S_j^7$ selon la règle exprimée par la table ci- dessous, commentée ensuite :

	S_j	S_j^1	S_j^2	S_j^3	S_j^4	S_j^5	S_j^6	S_j^7
Type 1	$V_{i_3} := V_{i_1} \tau V_{i_2}$; m	1	$\sigma(\tau)$	i_1	i_2	i_3	$\lvert m \rvert$	$t(m)$
Type 2	$V_{i_1} := x$; m	2	$t(p)$	i_1	$\lvert p \rvert$	q	$\lvert m \rvert$	$t(m)$
Type 3	V_{i_1} ; m_1, m_2	3	0	i_1	$\lvert m_1 \rvert$	$t(m_1)$	$\lvert m_2 \rvert$	$t(m_2)$
Type 4	Arrêt	0	0	0	0	0	0	0

où :

$t(y)$ est définie pour $y \in Z$, et vaut $t(y) = 0$ si $y > 0$, $t(y) = 1$ pour $y \leqslant 0$;

$|\,y\,|$ est valeur absolue de y;

$\sigma(\tau) = 0, 1, 2, 3$ selon que τ est $+, -, \times, \div$ respectivement;
enfin, si S_j est de type 2 c'est-à-dire de la forme $V_{i_1} := x; m$, on admet que le rationnel x est donné sous la forme p/q où p et q sont deux entiers relatifs tels que :

i. p et q sont premiers entre eux;

ii. q est > 0;

iii. si $x = 0$, alors $p = 0$ et $q = 1$.

Q 20. Démontrer que le 7-uple $(S_j^1, \ldots S_j^7)$ permet de reconstituer l'expression de l'instruction S_j.

Soit alors $\{ n_t \}$ $(t = 1, \ldots, m)$ une suite finie d'entiers positifs ou nuls.

On note :

$$n_t = \sum_{i=0}^{i=r(t)} D_t^i 2^i$$

l'expression binaire de n_t où les D_t^i valent 0 ou 1, $D_t^{r(t)}$ valant toujours 1, sauf pour $n_t = 0$ où $r(t)$ vaut 0 et $D_t^0 = 0$.

On définit alors, pour $t = 1, \ldots, m$

$$\omega(t) = \sum_{i=1}^{i=t-1} [r(i) + 2] \quad pour \quad t > 1; \quad \omega(1) = 0$$

et l'on pose :

$$< n_1, n_2, \ldots, n_m > = \sum_{t=1}^{t=m} 3^{\omega(t)} [2.3^{r(t)+1} + \sum_{i=0}^{i=r(t)} D_t^i 3^i].$$

Soit P un programme, défini par les instructions $S_1, S_2, \ldots, S_r$; on définit alors *l'entier descriptif* N_p de P par :

$$N_p = < S_1^1, S_1^2, \ldots, S_1^7, S_2^1, S_2^2, \ldots S_2^7, \ldots S_r^1, S_r^2, \ldots, S_r^7 >.$$

Q 21. On expliquera la formation de N_p pour le programme P de la question Q 1.

Q 22. Démontrer que N_p est caractéristique d'un programme et que l'ensemble de tous les programmes est dénombrable.

2° Pour tout processus calculable α, il existe (cf. II.1) un programme P_α, dont l'*entier descriptif* est N_α, permettant de calculer, pour tout ε de Q^+, la valeur $\alpha(\varepsilon)$.

Soit alors F (n, ε) une application programmable de l'entier positif n et du rationnel positif ε, ayant les propriétés suivantes :

a. Pour tout processus calculable α, le processus :

$$\Phi_\alpha : \varepsilon \in Q^+ \longmapsto F(N_\alpha, \varepsilon) \text{ est calculable;}$$

b. Si $\alpha \sim \beta$, alors $\Phi_\alpha \sim \Phi_\beta$.

Si I est une partie non vide de C et s'il existe une telle application programmable $F(n, \varepsilon)$, on définit une *fonction calculable f*, de domaine I et à valeur dans C, en posant $f(x) = \{ \Phi_\alpha \}$ pour tout $x = \{\alpha\} \in I$.

Q 23. Démontrer que $x \longmapsto x$ (l'identité sur C), $x \longmapsto |x|$ (la valeur absolue sur C) sont des fonctions calculables.

Q 24. Si f, g sont des fonctions calculables sur I, démontrer que :

$x \longmapsto f(x) \pm g(x)$ et $x \to f(x).\ g(x)$ sont des fonctions calculables sur I;

$x \longmapsto f(x)/g(x)$ est une fonction calculable sur I, si $g(x) \neq 0$ pour $x \in I$.

3° Soit $\alpha_n(\varepsilon)$ une application programmable de n (entier positif) et de ε (rationnel positif) telle que, pour n fixé, $\alpha_n : \varepsilon \longmapsto \alpha_n(\varepsilon)$ soit un processus calculable; en posant $a_n = \{\alpha_n\} \in C$, on définit une *suite calculable de nombres calculables.*

On dit qu'une *telle suite* a_n converge vers $l \in C$, et on écrit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l$, s'il existe une fonction calculable f définie pour tout $e \in C^+$ (où C^+ est l'ensemble des nombres calculables positifs), telle que $|\ a_n - l\ | \leqslant e$ pour tout $n \leqslant f(e)$. Une *telle suite* est dite « de Cauchy », s'il existe une fonction calculable g définie sur C^+ telle que $|a_n - a_m| \leqslant e$ pour tout $n \geqslant g(e)$ et $m \geqslant g(e)$.

Q 25. Démontrer qu'une condition nécessaire et suffisante, pour qu'une suite calculable de nombres calculables a_n converge vers une limite calculable, est qu'elle soit « de Cauchy ».

ANALYSE NUMERIQUE

Compte rendu de l'épreuve (361 candidats) (225 candidates)

Le problème consistait dans l'étude progressive de résultats de base concernant les applications programmables, les processus, nombres et fonctions calculables, et enfin (dernière question) les suites calculables de nombres calculables. Il s'agit là d'analyse dite «constructive» dans le corps des «nombres calculables» (accessibles à un ordinateur qui calculerait exactement dans Q).

Cette motivation «concrète» semble avoir à la fois intéressé et désorienté les candidats. Le travail proposé allait de questions simples à des questions difficiles. Cette nécessité d'abstraire dans un contexte original semble avoir souvent impressionné les candidats et l'ensemble du problème a prouvé le peu d'habitude à raisonner sur des formalismes.

A) Les 6 premières questions correspondent à l'apprentissage du langage de programmation élémentaire (mais parfaitement suffisant) défini dans l'introduction. Elles sont à peu près comprises en général. Néanmoins, trop peu de candidats ont le souci d'écrire des instructions formellement correctes (on écrit souvent : $S_1 : V_1 : = V_2$; 1 ou encore $S_1 : V_1 = - V_2$; 1, voire même $S_1 : V_1 : = g_1 (b_1,\dots, b_m)$; 1). D'autre part, rares sont les copies qui en Q_5 pensent à gérer correctement les mémoires, de façon à ne pas «écraser» les résultats intermédiaires du calcul. La question Q_6 est rarement comprise ; cette première partie montre qu'assez peu de candidats ont le sens de la programmation, c'est-à-dire de l'enchaînement d'instructions correctes dans un formalisme rigoureux.

B) On étudie alors, de Q_7 à Q_{11}, une loi d'addition sur l'ensemble Γ des processus calculables, définie par $(\alpha+\beta)(\varepsilon) = \alpha(\varepsilon/2) + \beta(\varepsilon/2)$. Son introduction est due au fait que, lorsque deux quantités sont connues à $\varepsilon/2$ près, leur somme l'est à ε près. Cette loi «bizarre» fait trébucher beaucoup de candidats. Q_7, exercice élémentaire d'analyse classique, est rarement traité correctement (50 % des copies seulement) par contre Q_8 l'est généralement bien.

Un premier clivage se produit alors : les copies médiocres ne parviennent pas à «admettre» la définition de l'addition des processus calculables, l'appliquent de façon incorrecte (en revenant irrésistiblement à l'addition usuelle des applications) et la déclarent même «évidemment associative puisque l'addition des applications l'est».

Néanmoins, entre Q_7 et Q_{11}, un lot important de copies prouve que l'essentiel est souvent compris : à savoir que (Γ+) n'étant pas associatif, on peut définir sur Γ une relation d'équivalence compatible avec l'addition dans Γ. Cette relation revient à identifier deux processus calculables dont la différence est «nulle à ε près» (c'est-à-dire : est un processus calculable nul). La loi induite sur le quotient - noté C - est alors une loi de groupe abélien, résultat important, qui semble avoir intéressé les candidats l'ayant compris.

C) De Q_{12} à Q_{19}, il s'agit de montrer que C est non seulement un groupe abélien, mais peut être muni d'une structure de corps commutatif qui étend celle de Q (corps des nombres calculables). L'injection de Q dans C est alors la suivante : si $q \in$ Q, on note encore q la classe des processus calculables équivalents au processus α tel que $\forall\ \varepsilon \in Q^+$, $\alpha(\varepsilon) = q$.

Aucune copie ne traite de façon complète cette partie, qui comporte à la fois une démarche abstraite et des calculs. Un bon nombre de copies s'arrêtent d'ailleurs en Q_{12}, pour reprendre parfois en Q_{20}, Q_{21}, Q_{22}.

Un deuxième clivage se produit alors : sans parvenir à faire les calculs correspondants, un lot de copies arrive néanmoins à effectuer la démarche correcte : il leur est attribué, si le calcul est correctement posé, la quasi totalité du barême. A ce propos, bien peu de candidats prouvent qu'ils ont le sens de trouver le point essentiel des démonstrations demandées.

L'extension à C de la relation d'ordre habituelle sur Q (Q_{19}) n'est pratiquement jamais faite correctement : pour $a \in C$, $a = \{\alpha\}$; on pose $a \geqslant 0$ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que l'on ait $\alpha \geqslant \varepsilon$ (dans Q). Il reste à montrer que cette définition est cohérente, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du représentant α choisi.

D) Les questions Q_{20} à Q_{22} reviennent sur des problèmes plus «concrets», précisément sur le codage des programmes (de façon assez fidèle à ce qui se fait réellement dans un ordinateur). Elles connaissent un regain d'intérêt. La plupart des candidats parviennent à montrer, par l'intermédiaire de l'entier descriptif d'un programme, que l'ensemble des programmes est dénombrable. Très peu comprennent que ce codage peut servir à écrire un programme générant puis exécutant un programme d'entier descriptif donné.

E) Enfin, la dernière partie (questions Q_{23} à Q_{25}), portant sur les fonctions et les suites calculables, n'est abordée de façon sérieuse que par quelques copies. La partie difficile de Q_{25}, montrant que C est «complet», n'est jamais abordée.

CONCLUSIONS (sur 225 copies féminines et 361 copies masculines)

1) pas de copie de très bonne qualité ;

2) un petit lot de bonnes copies, ayant compris l'essentiel du problème, et faisant preuve d'aisance et de solidité, ce qui est agréable à constater.

3) Un lot important de copies «moyennes», beaucoup plus timorées, préférant (ce qui est effectivement préférable) en faire peu (jusqu'à Q_{11} généralement) plutôt que d'écrire des choses fausses.

4) Une grande masse de copies très médiocres (premier clivage signalé) contenant l'erreur de base : l'impression est pénible de constater qu'il s'agit là de candidats ne maîtrisant même pas des notions simples.

Répartition des notes (barème commun sur 40)

	Féminines	Masculines
entre 0 et 5	27 copies	26 copies
entre 6 et 10	70 copies	37 copies
entre 11 et 15	77 copies	153 copies
entre 16 et 19	38 copies	106 copies
entre 20 et 40	13 copies	39 copies
	225 copies	361 copies

F. ROBERT N. GASTINEL

MÉCANIQUE GÉNÉRALE

NOTA. — *Les parties I et II sont indépendantes. La résolution des questions préliminaires n'est pas nécessaire pour traiter la partie II.*

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

Le problème est consacré à l'étude de certains mouvements d'une plaque plane solide $\mathfrak{P}$ mobile dans un plan fixe Π. On désigne par $\mathcal{R}_0$ le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ supposé galiléen; le plan fixe Π est le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On ne tiendra pas compte de l'action de la pesanteur.

La plaque $\mathfrak{P}$, supposée sans épaisseur, a pour masse m, pour centre d'inertie G, pour axes principaux d'inertie GX et GY, les moments d'inertie correspondants étant A et B. Son mouvement dans Π est déterminé par les trois fonctions ρ, φ, et α du temps t :

$$|\overrightarrow{OG}| = \rho(t), \qquad (\vec{i}, \overrightarrow{OG}) = \varphi(t), \qquad (\overrightarrow{OG}, \overrightarrow{GX}) = \alpha(t).$$

On pourra poser $C = A + B$, $\theta = \varphi + \alpha$, et noter x et y les coordonnées de G dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $d = \sup\limits_{M \in \mathfrak{P}} |\overrightarrow{GM}|$; on supposera toujours que le mouvement de $\mathfrak{P}$ est tel que l'on ait $\rho(t) > d$ pour toute valeur de t.

Le torseur $\mathcal{F}$ des forces agissant sur $\mathfrak{P}$ n'est pas le même dans les différentes parties du problème.

Dans tout l'énoncé U désigne une fonction des deux variables ρ et α, définie en tout point (ρ, α) tel que l'on ait $\rho > R_0$, le nombre fixe R_0 étant strictement positif; on suppose que U est continûment différentiable et vérifie $U(\rho, \alpha + 2\pi) = U(\rho, \alpha)$ quels que soient ρ et α. S'il existe un nombre réel R strictement supérieur à R_0 tel que, pour toute valeur de α, $\rho > R$ entraîne $\dfrac{\partial U}{\partial \rho}(\rho, \alpha) < 0$, on dira que U satisfait à la condition $(\mathcal{A}_R)$.

QUESTIONS PRÉLIMINAIRES

P 1° Démontrer l'inégalité $C \leqslant md^2$.

P 2° On suppose $\mathfrak{P}$ soumise à l'action d'un champ de forces newtoniennes attractives de centre O : la force, qui s'exerce sur la masse δm placée au point M de $\mathfrak{P}$, est $\overrightarrow{F(M)}\,\delta m = \dfrac{\mu\,\delta m}{|\overrightarrow{MO}|^3}\overrightarrow{MO}$, où μ est un réel strictement positif.

Montrer que les forces agissant sur $\mathfrak{P}$ dérivent d'une fonction de forces U_N qui ne dépend que de ρ et α. Exprimer U_N sous forme d'une intégrale double étendue à $\mathfrak{P}$.

P 3° On suppose que $\dfrac{d}{\rho}$ reste petit. Montrer que U_N admet par rapport à l'infiniment petit $\dfrac{d}{\rho}$ un développement limité de la forme :

$$U_N = \frac{\mu m}{\rho} + \frac{\mu}{\rho^3}\Psi(\alpha) + \frac{1}{\rho^3}o(1)$$

où $o(1)$ désigne une fonction qui tend vers 0 quand $\frac{d}{\rho}$ tend vers 0.

Expliciter $\tilde{U} = \frac{\mu m}{\rho} + \frac{\mu}{\rho^3} \Psi(\alpha)$ en fonction de α, ρ, A, B.

P 4° Montrer que U_N satisfait à la condition $(\mathcal{A}_d)$ et $\tilde{U}$ à la condition $(\mathcal{A}_{d\sqrt{\frac{3}{2}}})$ donc *a fortiori* à la condition $(\mathcal{A}_{3d})$.

I

La plaque $\mathcal{P}$ est soumise à des forces qui dépendent d'une fonction de forces U des seules variables ρ et α (voir Notations et définitions).

Un mouvement $\mathcal{M}$ de $\mathcal{P}$ est complètement déterminé par le système des conditions initiales : $\rho(t_0) = \rho_0$, $\alpha(t_0) = \alpha_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$, $\frac{d\rho}{d}(t_0) = \dot{\rho}_0$, $\frac{d\alpha}{dt}(t_0) = \dot{\alpha}_0$, $\frac{d\varphi}{dt}(t_0) = \dot{\varphi}_0$.

I. 1° Déterminer, en fonction des dérivées partielles de U, les éléments de réduction en G du torseur $\mathcal{F}$ des forces qui s'exercent sur $\mathcal{P}$.

I. 2° Écrire les équations différentielles du mouvement de $\mathcal{P}$. Trouver deux intégrales premières et en donner une interprétation mécanique.

I. 3° On suppose que U vérifie la condition $(\mathcal{A}_R)$. Montrer que, pour tout ρ_0 strictement supérieur à R, il existe au moins deux valeurs de α_0 de l'intervalle $[0, 2\pi[$ et des valeurs correspondantes de $\dot{\rho}_0$, $\dot{\alpha}_0$, $\dot{\varphi}_0$ telles que, pour tout $t \geqslant t_0$, on ait :

$$\rho(t) = \rho_0 \quad \text{et} \quad \alpha(t) = \alpha_0 .$$

Un tel mouvement sera noté mouvement $\mathcal{C}(\rho_0, \alpha_0)$.

I. 4° On suppose que U est la fonction $\tilde{U}$ définie en P 3° et qu'on a $R > 3d$. Les mouvements $\mathcal{C}$ de $\mathcal{P}$ correspondent alors à $\alpha_0 = 0$, $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, $\alpha_0 = \pi$, $\alpha_0 = \frac{3\pi}{2}$. L'étude des cas $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ se ramène immédiatement à celle du cas $\alpha_0 = 0$. De quelle façon?

On se propose de trouver des conditions nécessaires de stabilité du mouvement $\mathcal{C}(\rho_0, 0)$. Pour cela, après avoir déterminé $\dot{\rho}_0$, $\dot{\alpha}_0$, $\dot{\varphi}_0$, on posera :

$$\rho = \rho_0 + \delta \qquad \dot{\varphi}_0 = \omega \qquad \dot{\varphi} = \omega + \varepsilon .$$

Considérant δ, ε, α et leurs dérivées comme des infiniment petits du même ordre, écrire le système différentiel $\mathcal{L}$ obtenu en linéarisant les équations du second ordre qui définissent $\mathcal{M}$.

Démontrer que l'équation caractéristique de $\mathcal{L}$ est de la forme :

$$s(as^4 + bs^2 + c) = 0 .$$

Calculer a, b, c et en déduire que le système $\mathcal{L}$ est stable pour $B > A$, instable pour $B < A$ (le cas $B = A$ ne sera pas étudié). Que peut-on en conclure pour le mouvement $\mathcal{C}(\rho_0, 0)$?

II

Dans cette deuxième partie, le torseur $\mathcal{F}$ des forces agissant sur $\mathcal{P}$ a pour résultante $\frac{m\mu}{|\overrightarrow{GO}|^3} \overrightarrow{GO}$, et son moment résultant en G est :

$$\frac{3\mu}{2\rho^3}(A - B) \sin 2\alpha .$$

II. 1° Quelle relation y a-t-il entre ce torseur et le torseur des attractions newtoniennes défini en P 2°?

Les équations qui définissent le mouvement de G sont indépendantes de la variable α; quelle est la trajectoire de G et comment sont définies les variations de α?

II. 2° Définir les cas où la trajectoire de G est un cercle de centre O. Discuter alors la nature du mouvement de $\mathcal{R}$ autour de G. Déterminer les cas où α reste constant et étudier la stabilité de ces positions d'équilibre relatif, en supposant que les seules perturbations possibles sont des modifications des conditions initiales $\alpha_0 = \alpha(t_0)$ et $\dot{\alpha}_0 = \dfrac{d\alpha}{dt}(t_0)$.

Soit T la plus petite période du mouvement circulaire de G. Lorsque la fonction continue $t \longmapsto \alpha(t)$ est périodique, démontrer que sa plus petite période est toujours supérieure à $\dfrac{T}{\sqrt{3}}$.

II. 3° On suppose maintenant les conditions initiales $\rho_0, \dot{\rho}_0, \varphi_0, \dot{\varphi}_0$ telles que la trajectoire de G est une ellipse de foyer O, d'excentricité ε et d'équation en coordonnées polaires $\rho = \dfrac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$; on suppose aussi $\dot{\varphi}_0 > 0$.

Former l'équation différentielle (E) du second ordre qui définit les variations de α en fonction de φ.

On suppose $A < B$ et on pose $\dfrac{B-A}{B+A} = \dfrac{\omega^2}{3}$. Dans le cas où (E) possède une solution périodique de période 2π en φ, identiquement nulle pour $\varepsilon = 0$ et analytique en ε pour ε assez petit, cette solution s'écrit sous la forme :

$$\alpha_1(\varphi) = \varepsilon u_1(\varphi) + \varepsilon^2 u_2(\varphi) + \varepsilon^2\, o(1)\,.$$

Démontrer que dans le cas particulier $B = 2A$ l'existence d'une telle solution est impossible, et déterminer explicitement u_1 et u_2 dans le cas $B \neq 2A$.

II. 4° En supposant que α reste petit, former l'équation différentielle linéaire (L) obtenue en ne conservant que les termes du premier ordre dans le développement en série entière par rapport à α du premier membre de (E).

Intégrer (L) pour $B = 2A$ (on pourra poser $z = \alpha(1 + \varepsilon\cos\varphi)$ et chercher l'équation satisfaite par z). Que peut-on conclure dans ce cas?

II. 5° On suppose désormais $B \neq 2A$.

Soit (H) l'équation homogène associée à (L) et f une solution de (H) non identiquement nulle. Démontrer que la fonction g définie par $g(\varphi) = f(-\varphi)$ est aussi solution de (H). En déduire que (H) possède au moins une solution paire et une solution impaire en φ, linéairement indépendantes. On notera p la solution paire satisfaisant à $p(0) = 1$ et q la solution impaire satisfaisant à $q'(0) = 1$.

Les fonctions $\tilde{p}$ et $\tilde{q}$ définies par

$$\tilde{p}(\varphi) = p(\varphi + 2\pi) \quad \text{et} \quad \tilde{q}(\varphi) = q(\varphi + 2\pi)$$

sont aussi des solutions de (H) et s'expriment donc comme combinaisons linéaires de p et q :

$$\tilde{p} = ap + bq \qquad \tilde{q} = cp + dq\,.$$

Exprimer les relations qui existent entre $a, b, c, d, p(2\pi), p'(2\pi), q(2\pi), q'(2\pi)$. (On pourra par exemple donner à φ les valeurs 0 et -2π).

Démontrer que, s'il existe un nombre complexe X et une solution non nulle y de (H) tels que pour tout φ on ait $y(\varphi + 2\pi) = X\,y(\varphi)$, alors X s'exprime de façon simple en fonction de $p(2\pi)$.

Étudier, suivant la valeur de $p(2\pi)$, le comportement de la solution générale de (H) lorsque φ augmente indéfiniment.

II. 6° Dans l'hypothèse où ε est assez petit, on se propose de montrer que $|p(2\pi)|$ reste inférieur à 1. Pour cela on admet que la solution p est fonction analytique de ε et on l'écrit :

$$p = p_0 + \varepsilon p_1 + \dots + \varepsilon^n p_n + \dots,$$

où $p_0, p_1, \dots p_n, \dots$ sont des fonctions paires de φ satisfaisant à $p_0(0) = 1$ et, pour $i \geqslant 1$, $p_i(0) = 0$. Calculer p_0; en déduire le résultat cherché. Donner le développement limité à l'ordre 2 en ε de $p(2\pi)$.

II. 7° En regroupant les différents résultats obtenus en II. 4°, II. 5°, II. 6°, décrire le comportement de α en fonction de φ dans le cas $B \neq 2A$.

COMPOSITION DE MECANIQUE

Le problème est consacré à l'étude du mouvement d'un solide dans un champ d'attraction newtonienne, lorsque le solide se déplace loin du centre d'attraction, dans deux approximations classiques : dans la première la fonction de forces est remplacée par son développement à l'ordre 3 par rapport à l'inverse de la distance et dans la seconde sont négligés dans le torseur des forces les termes d'ordre supérieur à 3.

Aucune question ne nécessite des connaissances autres que celles supposées acquises dans le premier cycle, et, pour éviter des calculs trop lourds, solide et conditions initiales sont choisis de façon à étudier des mouvements plans.

Deux remarques générales regrettables sont à signaler :

- la majorité des candidats butent sur des questions élémentaires et classiques, faute sans doute de préparation suffisante ; ils ne disposent plus alors du temps et des moyens nécessaires pour aborder les questions leur permettant de faire la preuve de leurs aptitudes ;
- le nombre des erreurs de calcul dans des développements algébriques est anormalement élevé ; il est nécessaire de rappeler, comme le correcteur d'analyse l'an dernier, que, pour faire des mathématiques, il est toujours indispensable de savoir calculer... et de savoir calculer juste !

QUESTIONS PRELIMINAIRES

Destinées à établir quelques résultats techniques utiles dans la suite, elles ne devraient retenir un candidat que quelques minutes. Tel n'est pas le cas et, sur ces questions faciles, la moitié des candidats n'obtiennent pas la moitié des points attribués par le barême. Comment ne pas être surpris de constater que nombre de candidats ignorent ce qu'est une fonction de forces, et que, parmi ceux qui, ayant montré l'égalité $\vec{F}(M)\,\vec{dM} = -\mu\, d\left(\frac{1}{OM}\right)$, obtiennent : $U_n = \mu \iint_{\mathcal{L}} \frac{dm}{\sqrt{r^2 + \rho^2 + 2 r \rho \cos(\psi + \alpha)}}$, bien peu justifient correctement l'intégration !

Le développement limité par rapport à $\frac{1}{\rho}$ donne de suite :

$$\tilde{U} = \frac{\mu m}{\rho} + \frac{\mu}{2\rho^3}\,(3A\sin^2\alpha + 3B\cos^2\alpha - A - B)$$

Ce résultat ne se trouve que sur 10 des 105 copies de candidates !

La question P 4 demande clairement de majorer $\frac{\partial U_N}{\partial \rho}$ avant $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho}$. On ne s'explique pas pourquoi tant de candidats majorent d'abord $\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \rho}$, puis tentent, sans succès bien sûr, d'obtenir une majoration de

$\frac{\partial U_N}{\partial \rho}$ à partir de $U_N = \tilde{U} + \frac{1}{\rho^3}\, o\,(1)$. On est en droit aussi de s'étonner de la légèreté avec laquelle sont manipulés les développements limités.

Partie I

1° - Les éléments de réduction de $\mathcal{F}$ s'obtiennent en écrivant que la puissance de $\mathcal{F}$ est $\frac{dU}{dt}$, encore faut-il savoir écrire la puissance d'un torseur !

2° - Les équations du mouvement, obtenues soit directement après calcul de $\mathcal{F}$, soit par la méthode de Lagrange, ont deux intégrales premières évidentes : l'une traduit le théorème de l'énergie cinétique et s'écrit : $m\,(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\varphi}^2) + C\,\dot{\theta}^2 = 2\,U + 2h$,
l'autre, $m\,\rho^2\,\dot{\varphi} + C\,\dot{\theta}$ = constante, n'est autre que l'expression du théorème du moment cinétique en projection sur l'axe $(O, \vec{k})$ et montre que $\mathcal{F}$ est réductible à une force unique passant par O.

3° - Dans un mouvement $\mathcal{C}\ (\rho_o\,,\ \alpha_o)$, on a :

$$\left\{\begin{aligned} &-m\,\rho_o\,\dot{\varphi}^2 = \frac{\partial U}{\partial \rho}\,(\rho_o\,,\alpha_o)\\ &m\,\rho_o^2\,\ddot{\varphi} = -\,\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,(\rho_o\,,\,\alpha_o)\end{aligned}\right.$$

La première de ces deux équations entraîne $\ddot{\varphi} = 0$ et les deux conditions nécessaires

$\frac{\partial U}{\partial \rho}\,(\rho_o\,,\alpha_o) < 0$ (vérifiée par l'hypothèse) et $\frac{\partial U}{\partial \alpha}\,(\rho_o\,,\ \alpha_o) = 0$

s'en déduisent. Cette dernière condition est satisfaite pour au moins deux valeurs de α_o dans $[0,\ 2\pi]$ à cause de la périodicité et de la régularité de $\mathcal{U}$. Si les conditions précédentes sont satisfaites par les données initiales, l'unicité de la solution $\mathcal{D}$ montre que l'on a bien dans chaque cas un mouvement $\mathcal{C}(\rho_o\,,\,\alpha_o)$.

4° - Cette question classique de linéarisation des équations du mouvement autour d'un mouvement stationnaire nécessite un certain soin dans le calcul. Elle montre, hélas ! que bien peu de candidats sont capables de mener à bien un développement de Taylor au second ordre d'une fonction de plusieurs variables sans oubli de termes ou erreurs de calcul.

$$\left\{\begin{aligned} &\ddot{\delta} - 2\,\rho_o\,\omega\,\varepsilon - \delta\,\Big(\frac{3\mu}{\rho_o^3} + \frac{15\,\mu}{2\,\rho_o^5}\ \frac{2\,B - A}{m}\Big) = 0\\ &2\,\rho_o\,\omega\,\dot{\delta} + \rho_o^2\,\dot{\varepsilon} - \frac{3\mu}{m\,\rho_o^3}\,(B - A)\,\alpha = 0 \qquad \text{avec } \omega^2 = \frac{\mu}{2\,\rho_o^5}\,\Big(2\,\rho_o^2 + \frac{6B - 3A}{m}\Big)\\ &(A + B)\,(\dot{\varepsilon} + \ddot{\alpha}) + \frac{3\mu}{\rho_o^3}\,(B - A)\,\alpha = 0\end{aligned}\right.$$

et conduit à une équation caractéristique du type $s\,(as^4 + bs^2 + c) = 0$
avec $a = C\rho_o^2$ (b et c ont des expressions plus compliquées).

Les conditions de stabilité de $\mathcal{L}$ sont : $b > 0$; $c > 0$; $b^2 - 4ac > 0$; un calcul soigné montre qu'elles sont équivalentes à $B - A > 0$.

Aucune copie ne donne une solution entièrement correcte de cette question ; la moindre erreur, même bénigne, est en effet fatale. Les copies, trop peu nombreuses malheureusement, montrant une connaissance correcte des méthodes ont été notées avec une grande indulgence.

Partie II

1° - Le torseur $\mathcal{F}$ est obtenu à partir de celui de P_2 en ne conservant dans les éléments de réduction que les termes d'ordre inférieur ou égal à 3 en $\frac{1}{\rho}$. Avec cette approximation, la trajectoire de G ne dépend pas des variations de α; mais α dépend de ρ et φ.

Le mouvement de G n'est autre que le mouvement de Kepler qui semble bien mal connu des candidats. Pour beaucoup la trajectoire ne peut être qu'une ellipse, parfois de centre O, et quelques candidats ne savent pas reconnaître une conique dans l'équation polaire $\rho = \frac{p}{a + b\cos\varphi}$ (pourquoi n'ont-ils pas lu la question II,3?) Que dire des candidats qui pensent que, dans tout mouvement à accélération centrale, « il suffit que la loi des aires soit satisfaite pour que la trajectoire soit une conique » ?

2° - Dans les mouvements où G a une trajectoire circulaire, on a : $\ddot{\alpha} = \frac{3\mu}{\rho_o^3} \frac{A-B}{C} \sin\alpha\cos\alpha$, équation pendulaire classique si l'on pose $\beta = 2\alpha$. Il est regrettable que tant de candidats pensent que la seule intégrale de cette équation est : $\dot{\alpha}^2 = -\frac{3\mu}{2\rho_o^3} \frac{A-B}{C} \cos 2\alpha$.

Lorsque α varie périodiquement (entre $-\alpha_o$ et α_o), on a $B > A$. La période du mouvement autour de G est :

$$T_\alpha = 2\sqrt{\frac{B+A}{B-A}} \frac{1}{\sqrt{6\omega^2}} \int_{-\beta_o}^{+\beta_o} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\beta_o}} \qquad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}\right)$$

En posant $\sin\alpha = u$ et $k = \sin\alpha_o$, il vient :

$$\frac{T_\alpha}{T} = \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \sqrt{\frac{B+A}{B-A}} \int_{-k}^{+k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(k^2-u^2)}}$$

$$\text{On a : } \int_{-k}^{k} \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}} < \int_{-k}^{k} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(k^2-u^2)}} < \frac{1}{\sqrt{(1-k^2)}} \int_{-k}^{k} \frac{du}{\sqrt{k^2-u^2}}$$

d'où, puisqu'on a $\sqrt{\frac{B+A}{B-A}} > 1$, $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{T_\alpha}{T} < \frac{1}{\sqrt{3\cos\beta_o}}$

3° - On est obligé de constater ici que beaucoup de candidats ne lisent pas le texte : « l'équation différentielle qui définit les variations de α en fonction de φ » ne peut évidemment contenir t. En fait l'élimination de t entre les équations du mouvement G et celle qui définit α conduit à :

$$(E)\ (1 + \varepsilon\cos\varphi) \frac{d^2\alpha}{d\varphi^2} - 2\varepsilon\sin\varphi\left(1 + \frac{d\alpha}{d\varphi}\right) + \omega^2 \sin\alpha\cos\alpha = 0$$

Or, dans plus de la moitié des copies abordant cette question, le résultat final trouvé est du type : $\frac{d^2\alpha}{dt^2} = f(\alpha, \varphi)$. Il est clair qu'alors toutes les questions ultérieures ne peuvent être correctement traitées.

L'équation qui définit u_1 est : $u_1'' + \omega^2 u_1 = 2\sin\varphi$. Pour $\omega^2 = 1$ ($B = 2A$), cette équation n'a pas de solution périodique. Pour $\omega^2 \neq 1$, la solution 2π-périodique est : $u_1 = \frac{2\sin\varphi}{\omega^2 - 1}$. Ensuite u_2 s'obtient par

$$u_2'' + \omega^2 u_2 = 2\sin\varphi\, u_1' - \cos\varphi\, u_1'' = 3\frac{\sin 2\varphi}{\omega^2 - 1}$$

d'où la solution 2π-périodique : $u_2 = \dfrac{3 \sin 2\varphi}{(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 4)}$. On vérifie que $\omega^2 - 4$ n'est jamais nul.

4° - On trouve immédiatement

$$(L)(1 + \varepsilon \cos \varphi)\,\alpha'' - 2\,\varepsilon \sin \varphi\,\alpha' + \omega^2 \alpha = 2\,\varepsilon \sin \varphi$$

qui, pour $\omega = 1$ et en posant $z = \alpha(1 + \varepsilon \cos \varphi)$, devient $z'' + z = 2\,\varepsilon \sin \varphi$, équation qui n'a que des solutions non bornées lorsque y tend vers l'infini. Il y a alors résonance et (L) n'est plus une bonne approximation de (E).

5° - 6° - Ces dernières questions concernent l'étude des solutions d'une équation différentielle linéaire à coefficients périodiques. Elles ne sont pratiquement pas abordées.

Pour conclure ce rapport, il importe de rappeler avec insistance aux futurs candidats l'impossibilité de faire de la mécanique sans un minimum de connaissances sur les équations différentielles, minimum contenu d'ailleurs dans le programme du premier cycle. Peut-être tireront-ils quelque enseignement de cet extrait authentique d'une copie de candidate, soumis à leur méditation.

$$\text{«}\ \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^2} \Longrightarrow x^2\, d^2x = -\mu dt^2 \Longrightarrow \frac{x^3}{3}\, dx + \lambda_1 = -\mu t\, dt + \lambda_2$$

$$\Longrightarrow \frac{x^4}{12} + \lambda_1 x + \lambda'_1 = -\frac{\mu t^2}{2} + \lambda_2 t + \lambda'_2\ \text{»}$$

Il se passe de commentaire.

Répartition des notes

Agrégation masculine : 210 copies

n = 0	1 ⩽ n ⩽ 5	6 ⩽ n ⩽ 10	11 ⩽ n ⩽ 15	16 ⩽ n ⩽ 20	21 ⩽ n ⩽ 25	26 ⩽ n ⩽ 30	31 ⩽ n ⩽ 35	35 ⩽ n ⩽ 40
11	88	49	18	16	14	11	2	1

Agrégation féminine : 105 copies

n = 0	1 ⩽ n ⩽ 5	6 ⩽ n ⩽ 10	11 ⩽ n ⩽ 15	16 ⩽ n ⩽ 20	21 ⩽ n ⩽ 25	26 ⩽ n ⩽ 30	31 ⩽ n ⩽ 35	35 ⩽ n ⩽ 40
9	37	25	17	9	4	3	1	0

PROBABILITÉS

N.B. — *Les différentes questions du problème sont largement indépendantes, à condition d'admettre à tout moment les résultats qui précédent.*

NOTATIONS.

a. Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, et T une application mesurable de Ω dans lui-même (c'est-à-dire telle que :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \qquad T^{-1}(A) \in \mathcal{A}).$$

On note E l'espérance mathématique relativement à P et, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on note 1_A la fonction indicatrice de A (c'est-à-dire l'application de Ω dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$(\forall \omega \in A) \quad 1_A(\omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\forall \omega \notin A) \quad 1_A(\omega) = 0).$$

b. La notation [ ] (resp.] [,]] et [[) est utilisée pour désigner les intervalles fermés (resp. ouverts, semi-ouverts) dans la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ (munie, quand besoin est, de sa topologie usuelle d'espace compact).

La notation $<\ >$ (resp. $>\ <$, $>\ >$ et $<\ <$) est utilisée pour désigner les intervalles fermés (resp. ouverts, semi-ouverts) dans $\overline{\mathbf{N}}$ (ensemble ordonné obtenu en adjoignant à l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels un plus grand élément noté ∞).

Pour tout x appartenant à $[0, \infty[$, on note $\mathcal{E}(x)$ la partie entière de x, et on pose $\mathcal{F}(x) = x - \mathcal{E}(x)$.

On définit par ailleurs $\mathcal{E}(\infty) = \infty$, $\mathcal{F}(\infty) = 0$.

On note I l'ensemble $[0, 1[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de I, et λ la mesure de Lebesgue sur $(I, \mathcal{B})$.

c. T^0 est l'application identique de Ω sur lui-même.

Pour tout n appartenant à $< 1, \infty <$, on définit l'application T^n de Ω dans lui-même par la relation de récurrence :

$$T^n = T^{n-1} \circ T.$$

RAPPEL.

Soit $\mathcal{C}$ un *clan* (ou algèbre de Boole) de parties de Ω (c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble des parties de Ω, fermé pour l'union des familles finies et la complémentation); supposons que $\mathcal{A}$ soit la *tribu* (ou σ-algèbre de Boole) *engendrée* par $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire la plus petite tribu de parties de Ω qui contienne $\mathcal{C}$).

Alors P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$, et vérifie :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \, (\forall \varepsilon > 0) \, (\exists\, C \in \mathcal{C}) \quad P(\complement_A C \cup \complement_C A) < \varepsilon.$$

On dit que T *conserve la probabilité* P si et seulement si :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \quad P[T^{-1}(A)] = P(A).$$

On dit que T est P-*mélangeante* si et seulement si elle conserve P et que, de plus,

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\forall B \in \mathcal{A}) \lim_{n \to \infty} P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) = P(A)\,P(B).$$

1° Soit $\mathcal{C}$ un clan de parties de Ω, qui engendre $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que, pour que T conserve P, il faut et il suffit que :

$$(\forall C \in \mathcal{C}) \quad P[T^{-1}(C)] = P(C).$$

b. Démontrer que, pour que T soit P-mélangeante, il faut et il suffit qu'elle conserve P et que :

$$(\forall C \in \mathcal{C})(\forall D \in \mathcal{C}) \lim_{n \to \infty} P(C \cap (T^n)^{-1}(D)) = P(C)\,P(D).$$

2° Dans toute cette question, on suppose que T conserve P.

a. Soit A appartenant à $\mathcal{A}$; pour tout n appartenant à $< 0, \infty <$, on pose :

$$d_n = P(A \cap (T^n)^{-1}(A)) - (P(A))^2.$$

Soit $(k_n)_{n \in < 0, \infty <}$ une suite strictement croissante d'éléments de $< 0, \infty <$. Démontrer que, pour tout n appartenant à $< 1, \infty <$,

$$E\left(\left[\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in < 0, n <} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}\right) - P(A)\right]^2\right)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i \in < 0, n <} \left(\frac{1}{n} \sum_{j \in < 0, n <} d_{|k_i - k_j|}\right).$$

En déduire que, si T est P-mélangeante,

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in < 0, n <} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}$$

tend vers P(A) en moyenne d'ordre 2, ainsi que stochastiquement (autrement dit en probabilité).

b. Réciproquement, on suppose que T vérifie la condition suivante: pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, et toute suite $(k_n)_{n \in < 0, \infty <}$ strictement croissante d'éléments de $< 0, \infty <$, la suite des variables aléatoires

$$\frac{1}{n} \sum_{i \in < 0, n <} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}$$

converge stochastiquement vers P(A).

Démontrer que, pour toute telle suite $(k_n)_{n \in < 0, \infty <}$, tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{A}$, et tout n appartenant à $< 1, \infty <$, on a :

$$\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in <0, n<} P\left((T^{k_i})^{-1}(A) \cap B \right) \right) - P(A)\,P(B) \right|$$

$$\leqslant E\left(\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in <0, n<} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)} \right) - P(A) \right| \right).$$

Démontrer que, si une suite $(x_n)_{n \in <0, \infty<}$ de nombres réels ne converge pas vers 0, il existe une suite $(k_n)_{n \in <0, \infty<}$, strictement croissante, d'éléments de $< 0, \infty <$, telle que la suite

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in <0, n<} x_{k_i} \right)_{n \in <1, \infty<}$$

ne converge pas vers 0.

En déduire que T est P-mélangeante.

3° *Exemples.*

a. Soit $\Omega = < 1, n >$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω, et T une application bijective de Ω sur lui-même (autrement dit une substitution d'ordre n).

Quelles sont les probabilités P que T conserve?

Quelles sont celles pour lesquelles T est mélangeante?

b. On considère l'espace de probabilité $(I, \mathcal{B}, \lambda)$; soit c appartenant à I, et soit T l'application de I dans lui-même définie par :

$$(\forall\, x \in I) \quad T(x) = \mathcal{F}(x + c)\,.$$

Est-ce que T conserve λ?

Est-ce que T est λ-mélangeante?

c. On suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et l'application T vérifient la condition suivante : il existe une suite $(X_n)_{n \in <0, \infty<}$ de variables aléatoires, indépendantes et de même loi, telle que :

— $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu par rapport à laquelle toutes les variables aléatoires X_n sont mesurables;

— pour tout ω appartenant à Ω, et tout n appartenant à $< 0, \infty <$, on a :

$$X_n\,[T(\omega)] = X_{n+1}(\omega).$$

Démontrer que T conserve P.

Démontrer que T est P-mélangeante.

II

N. B. — *Dans toute cette partie,* on suppose que T *conserve* P.

Étant donné deux événements A et B, tels que $P(B) \neq 0$, on note $P^B(A)$ la probabilité conditionnelle de A par rapport à B.

Étant donné une sous-tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, un événement A, et une variable aléatoire P-intégrable X, on note $P^{\mathcal{C}}(A)$ (resp. $E^{\mathcal{C}}(X)$) la probabilité (resp. l'espérance) conditionnelle, par rapport à la sous-tribu $\mathcal{C}$, de l'événement A (resp. de la variable aléatoire X).

On note, pour tout n appartenant à $< 0, \infty <$, $\mathcal{A}_n = (T^n)^{-1}(\mathcal{A})$

$$(\mathcal{A}_n = \{A_n \subset \Omega\,; \quad (\exists A \in \mathcal{A})\ A_n = (T^n)^{-1}(A)\}).$$

On pose :

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n \in < 0,\ \infty <} \mathcal{A}_n .$$

On dit que T est P-*Kolmogorovienne* si et seulement si, pour tout A_∞ appartenant à $\mathcal{A}_\infty$, on a, soit $P(A_\infty) = 0$, soit $P(A_\infty) = 1$.

1° On suppose que T est P-Kolmogorovienne; le but de cette question est d'en déduire qu'elle est P-mélangeante.

Soit A appartenant à $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que, si $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$,

$$E^{\mathcal{A}_n}\big(P^{\mathcal{A}_m}(A)\big) = P^{\mathcal{A}_n}(A)$$

et

$$E^{\mathcal{A}_n}\big(P^{\mathcal{A}_m}(A)P^{\mathcal{A}_n}(A)\big) = \big[P^{\mathcal{A}_n}(A)\big]^2.$$

Que peut-on dire de $P^{\mathcal{A}_\infty}(A)$?

b. Démontrer que, si $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$,

$$E\Big[\big(P^{\mathcal{A}_m}(A) - P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)^2\Big] = E\Big[\big(P^{\mathcal{A}_m}(A)\big)^2\Big] - E\Big[\big(P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)^2\Big].$$

c. Démontrer que la suite $\big(P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)_{n \in < 0,\ \infty <}$ converge en moyenne d'ordre 2.

d. Démontrer que la suite $\big(P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)_{n \in < 0,\ \infty <}$ converge en moyenne d'ordre 1; démontrer que sa limite est P(A).

e. Soit B appartenant à $\mathcal{A}$; démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} [P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) - P(A)\,P(B)] = 0.$$

2° On reprend la situation de la question I-3°-*c*. T est-elle P-Kolmogorovienne?

3° Soit $(\mathcal{C}_n)_{n \in < 1,\ \infty <}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, telle que $\mathcal{A}$ soit engendrée par $\bigcup_{n \in < 1,\ \infty <} \mathcal{C}_n$.

On suppose qu'existe une constante strictement positive H telle que, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, tout n appartenant à $< 1, \infty <$, et tout C_n appartenant à $\mathcal{C}_n$ et vérifiant $P(C_n) \neq 0$, on ait :

$$H\ P(A) \leqslant P^{C_n}[(T^n)^{-1}(A)].$$

Démontrer que, pour tout n appartenant à $< 1, \infty <$, tout A_n appartenant à $\mathcal{A}_n$ et vérifiant $P(A_n) \neq 0$, et tout C_n appartenant à $\mathcal{C}_n$, on a :

$$H\,P(C_n) \leqslant P^{A_n}(C_n).$$

Démontrer que, pour tout A_∞ appartenant à $\mathcal{A}_\infty$ et vérifiant $P(A_\infty) \neq 0$ et tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on a :

$$H\,P(A) \leqslant P^{A_\infty}(A).$$

En déduire que T est P-Kolmogorovienne.

III

La notation φ désigne une application de $[0,1]$ dans $[0,\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) φ est continue et strictement monotone;

(2) *a.* Si φ est strictement croissante, on a :

$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) \in \,<2,\infty>\,;$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a :

$$\varphi(0) \in \,<3,\infty> \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = 1;$$

(3) En tout t, tel que $\varphi(t)$ appartient à $[0,\infty[$, φ est dérivable et :

a. Si φ est strictement croissante, on a :

$$\inf_{t\in[0,\,1]} |\,\varphi'(t)\,| > 1;$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a,

$$(\forall\ t_0 \in\,]0,\ 1[)\quad \inf_{t\in]0,\,t_0]} |\,\varphi'(t)\,| > 1.$$

Étant donné n appartenant à $<1,\infty<$, on dit qu'une suite d'entiers de longueur n, $(a_i)_{i\in<1,\,n>}$, est φ-régulière si et seulement si elle satisfait aux conditions suivantes :

a. Si φ est strictement croissante, on a :

$$(\forall\ i \in\, <1, n>) \qquad a_i \in\, <0, \varphi(1)<.$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a :

$$(\forall\ i \in\, <1, n>) \qquad a_i \in\, <1, \varphi(0)>$$

et, de plus, s'il existe i tel que $a_i = \varphi(0)$, alors, pour tout j appartenant à $<i, n>$, on a $a_j = \varphi(0)$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des suites φ-régulières de longueur n; on pose :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n\in<1,\,\infty<} \mathcal{S}_n.$$

Pour tout x appartenant à I, on définit les deux suites

$$(r_n(x))_{n\in<0,\,\infty<} \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon_n(x))_{n\in<1,\,\infty<}$$

par la récurrence suivante :

$$r_0(x) = x$$

$$(\forall\, n \in <1,\ \infty<) \left|\ \begin{array}{l} r_n(x) = \mathcal{F}(\varphi(r_{n-1}(x))) \\ \varepsilon_n(x) = \mathcal{E}(\varphi(r_{n-1}(x))) . \end{array}\right.$$

La suite $(\varepsilon_n(x))_{n \in <1,\ \infty<}$ est appelée le φ-développement de x.
Soit T l'application de I dans lui-même définie par :

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \qquad \mathrm{T}(x) = \mathcal{F}(\varphi(x)).$$

Notre but est de démontrer qu'il existe des probabilités sur $(\mathrm{I}, \mathcal{B})$ conservées par T, et de trouver une condition suffisante pour que T soit P-Kolmogorovienne (et donc P-mélangeante); on considérera en particulier les cas suivants :

α. Développement en base p (où $p \in <2,\ \infty<$) :

$$(\forall\ x \in [0,\ 1]) \quad \varphi(x) = px.$$

β. Développement quadratique :

$$(\forall\ x \in [0,\ 1]) \quad \varphi(x) = (1 + x)^2 - 1.$$

γ. Développement en fraction continue :

$$(\forall\ x \in]0,\ 1]) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = \infty.$$

1° *a*. Démontrer que T est une application mesurable de I dans lui-même.

b. Soit x appartenant à I; exprimer, en fonction du φ-développement de x, le φ-développement de $\mathrm{T}(x)$.

2° *a*. Démontrer que, pour tout x appartenant à I, et tout n appartenant à $<1, \infty<$, la suite $(\varepsilon_i(x))_{i \in <1,\ n>}$ est φ-régulière.

b. Réciproquement, à toute suite φ-régulière de longueur n,

$$s = (a_i)_{i \in <1,\ n>} ,$$

on associe :

$$\Delta_s = \{ x \in \mathrm{I};\ (\forall\ i \in <1,\ n>) \quad \varepsilon_i(x) = a_i \}.$$

Démontrer que les Δ_s forment, quand s parcourt $\mathcal{S}_n$, une partition de I en intervalles non vides.

Démontrer l'égalité : $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda(\Delta_s) = 0.$

Pour tout n appartenant à $<1, \infty<$, on note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des unions des familles dénombrables d'intervalles Δ_s (où s appartient à $\mathcal{S}_n$).

Quelle est la tribu engendrée par

$$\bigcup_{n \in <1,\ \infty<} \mathcal{C}_n ?$$

3° *a*. Soit P une probabilité sur $(\mathrm{I}, \mathcal{B})$; pour tout s appartenant à $\mathcal{S}$, on pose :

$$p_s = \mathrm{P}(\Delta_s).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$, pour que T conserve P.

b. Inversement, soit donnée une famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$ d'éléments de $[0,1]$; établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe une probabilité P sur $(\mathrm{I},\mathcal{B})$, conservée par T, telle que :

$$(\forall s \in \mathcal{S}) \quad \mathrm{P}(\Delta_s) = p_s$$

(on pourra chercher à déterminer P par la restriction de sa fonction de répartition à l'ensemble des extrémités des intervalles Δ_s).

Démontrer qu'on peut choisir la famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$ de manière que pour tout n appartenant à $< 1,\infty <$, les n variables aléatoires ε_i $(i \in < 1, n >)$ soient indépendantes.

c. On reprend les cas particuliers $\alpha.$ et $\gamma.$ cités ci-dessus. Démontrer que l'application T conserve :

— dans le cas $\alpha.$ la probabilité λ;

— dans le cas $\gamma.$ la probabilité admettant pour densité par rapport à λ la fonction définie sur I par :

$$x \longmapsto \frac{1}{\mathrm{Log}\, 2}\, \frac{1}{1+x}.$$

4° Soit P une probabilité sur $(\mathrm{I},\mathcal{B})$, conservée par T; on suppose de plus que :

(A) Il existe deux nombres réels strictement positifs, K_1 et K_2, tels que P soit absolument continue par rapport à λ, de densité $\frac{d\mathrm{P}}{d\lambda}$ vérifiant :

$$\mathrm{K}_1 \leqslant \frac{d\mathrm{P}}{d\lambda} \leqslant \mathrm{K}_2 \,;$$

(B) Il existe un nombre réel strictement positif K tel que, pour tout intervalle $[x,y[$ de I, tout n appartenant à $< 1,\infty <$ et tout s appartenant à $\mathcal{S}_n$, on ait :

$$\lambda\big((\mathrm{T}^n)^{-1}([x,y[) \cap \Delta_s\big) \geqslant \mathrm{K}(y - x)\, \lambda(\Delta_s).$$

Démontrer qu'est satisfaite la condition, établie à la question II 3°, pour que T soit P-Kolmogorovienne.

5° *a.* Démontrer que la condition (A) est satisfaite pour chacune des probabilités considérées en III-3°-*c*.

b. Démontrer qu'il existe, pour tout n appartenant à $< 1,\infty <$, et tout s appartenant à $\mathcal{S}_n$, et tel que $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, une application Ψ_s de I dans lui-même, strictement monotone, et telle que, pour tout intervalle $[x,y[$ de I, $\Delta_s \cap (\mathrm{T}^n)^{-1}([x,y[)$ soit un intervalle d'extrémités $\Psi_s(x)$ et $\Psi_s(y)$.

Démontrer que la condition (B) est satisfaite dans chacun des cas particuliers $\alpha.$ $\beta.$ et $\gamma.$

(On pourra passer par les étapes suivantes :

Cas β : pour tout s appartenant à $\mathcal{S}$, et vérifiant $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, on a :

$$\inf_{x \in \mathrm{I}} |\, \Psi'_s(x) \,| \geqslant \frac{1}{2} \sup_{x \in \mathrm{I}} |\, \Psi'_s(x) \,|\,;$$

Cas γ : $s = (a_i)_{i \in < 1,\, n >}$ étant une suite régulière telle que $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, si $(\alpha_i)_{i \in < 0,\, n >}$ et $(\beta_i)_{i \in < 0,\, n >}$ sont les suites solutions de l'équation de récurrence :

$$(\forall\, i \in < 2, n >) \quad x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2}$$

qui vérifient les conditions initiales $\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 1, \quad \beta_0 = 1, \quad \beta_1 = a_1$,
alors, pour tout x appartenant à I, on a :

$$\Psi_s^{\prime}(x) = \frac{\alpha_n + x\,\alpha_{n-1}}{\beta_n + x\,\beta_{n-1}}\Big).$$

RAPPORT SUR LA COMPOSITION DE PROBABILITES ET STATISTIQUE

GENERALITES

Ce problème a été suggéré par certaines questions de Théorie Ergodique; le thème central en était la notion de transformation mélangeante sur un espace de probabilité.

Dans la première partie, on s'assure tout d'abord (1°) que, pour que T soit mélangeante, il suffit que soit vérifiée une condition portant uniquement sur un clan qui engendre la tribu des événements ; les seuls outils nécessaires sont ici la notion de tribu engendrée par un clan et le théorème de prolongement de Carathéodory, qu'on avait pris soin de rappeler dans l'introduction de l'énoncé. On démontre ensuite (2°) une condition nécessaire et suffisante de mélange, qui est due à Blum et Hanson ([3]), et dans la démonstration de laquelle interviennent les relations entre les convergences dans L^2, dans L^1 et stochastique ([6], III, 3° alinéa). Enfin, en 3°, on étudie trois exemples élémentaires (qu'on peut trouver, ainsi que bien d'autres dans [1], chapitre I), faisant intervenir respectivement les probabilités sur ensemble fini, la loi uniforme sur un segment ([6], I, 5° alinéa) et l'indépendance des variables aléatoires ([6], II, 7° alinéa).

La deuxième partie consiste en l'étude d'une condition suffisante de mélange, à savoir le caractère Kolmogorovien. Pour démontrer que c'est bien une condition suffisante (1°), on utilise, comme dans [1], chapitre III, 11, la convergence des martingales inversées ; ici, nous nous contentons de faire intervenir la convergence dans L^2, puis dans L^1 ; le seul outil nécessaire pour cela est la définition de l'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu ([6], II, 4° alinéa). En 2° et 3°, on donne deux exemples de transformations Kolmogoroviennes : le 2° est une application immédiate de la loi du tout ou rien ([6], III, 4° alinéa) ; le 3°, qui est destiné à être utilisé dans la troisième partie, fait intervenir des calculs élémentaires sur les probabilités conditionnelles relatives à des événements de probabilité non nulle ([6], II, 1er alinéa) et, une fois encore, le théorème de prolongement de Carathéodory.

La troisième partie a été inspirée par un article de Rényi ([7]), dont on a un peu simplifié les hypothèses (en supposant φ dérivable, et prenant en 0 et 1 des valeurs entières ou infinies) et modifié la présentation afin de mettre l'accent sur le caractère Kolmogorovien, et non seulement sur le caractère ergodique, de la transformation étudiée (ainsi qu'il est fait en [1], chapitre 1, 4, dans le cas particulier de la représentation d'un nombre réel en fraction continue) ; cette partie ne fait appel, comme connaissances purement probabilistes, qu'aux notions de densité et de fonction de répartition ([6], I, 4° alinéa) et, à nouveau, d'indépendance des variables aléatoires ; par contre, elle nécessite, pensons-nous, une certaine habileté de calcul, au niveau de l'analyse élémentaire ; à ce propos, le lecteur pourra étudier avec profit les articles de Bissinger ([2]) et Everett ([4]), qui furent utilisés par Rényi dans [7].

Première Partie

I - 1° - La démonstration des conditions suffisantes figurant dans cette question a arrêté de très nombreux candidats. Pourtant, le a. peut se traiter en 3 lignes :

«les applications de $\mathcal{A}$ dans [0,1], P et $P \circ T^{-1}$, sont toutes deux des probabilités ; elles coïncident sur $\mathcal{C}$, clan qui engendre $\mathcal{A}$; donc elles coïncident sur $\mathcal{A}$ ».

(voir, dans le RAPPEL, le membre de phrase : « Alors P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$ »).

Par contre le b. nécessite un raisonnement un peu plus élaboré ; on peut en particulier utiliser la dernière ligne du RAPPEL (c'est-à-dire la densité de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ pour la topologie définie sur $\mathcal{A}$ par l'écart d défini par $d(A, B) = P(A \,\Delta\, B)$).

Voici les types d'erreurs les plus fréquents :

- « C'est évident parce que P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$ » (ceci pour le b. comme pour le a.) ;
- « Toute partie de $\mathcal{A}$ est de la forme $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ où les A_i sont des éléments de $\mathcal{C}$ » (ceci souvent « justifié » par le théorème : la tribu et la classe monotone engendrés par un clan coïncident) ; cette erreur connaît plusieurs variantes, soit plus grossières (« tout élément de $\mathcal{A}$ est union finie d'éléments de $\mathcal{C}$ »), soit plus subtiles (« union dénombrable d'intersections dénombrables d'éléments de $\mathcal{C}$ ») ;
- « $\mathcal{A}$ se construit en effectuant une infinité de fois des unions et intersections dénombrables à partir des éléments de $\mathcal{C}$ » ; il faut savoir que la construction de $\mathcal{A}$ à partir de $\mathcal{C}$ nécessite une récurrence transfinie (voir par exemple [5], p. 26) et qu'une telle démonstration imposerait donc de s'assurer que la propriété considérée « passe bien » pour les ordinaux de deuxième espèce comme pour ceux de première espèce, ce qui serait ici bien trop compliqué ;
- « démonstration » de a. à l'aide de la dernière ligne du rappel : vouée à l'échec, car, si à A et $\varepsilon > 0$, on associe C tel que $P(A \Delta C) < \varepsilon$, et $P(T^{-1}(C)) = P(C)$, il faudrait, pour pouvoir en déduire que $P(T^{-1}(A)) = P(A)$, s'assurer qu'on a aussi une relation entre $P(T^{-1}(A \Delta C))$ et $P(A \Delta C)$; or rien ne permet de l'obtenir, puisqu'on ne peut affirmer que $A \Delta C$ appartient à $\mathcal{C}$; pourtant, cette affirmation figure, de manière plus ou moins voilée selon les scrupules du candidat, dans toutes les copies ayant tenté une telle méthode ;
- en a., considérer $\mathcal{D} = \{ A \in \mathcal{A} \,;\, P(T^{-1}(A)) = P(A) \}$, et « démontrer que c'est une tribu » ; idée intéressante, mais ici inopérante car rien ne permet d'établir que $\mathcal{D}$ est fermé pour l'intersection (le candidat s'en tire généralement en vérifiant que $\mathcal{D}$ est fermé pour la complémentation et l'union dénombrable de parties disjointes, et en en « déduisant » que c'est une tribu) ; par contre, il est correct de démontrer que $\mathcal{D}$ est une classe monotone, et contient donc la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$, qui n'est autre, puisque $\mathcal{C}$ est un clan, que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$;
- « Soit $A = \lim\limits_{p \to \infty} A_p$ et $B = \lim\limits_{p \to \infty} B_p$; alors

$$\lim_{n \to \infty} P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) = \lim_{n \to \infty} \lim_{p \to \infty} P(A_p \cap (T^n)^{-1}(B_p))$$
$$= \lim_{p \to \infty} \lim_{n \to \infty} P(A_p \cap (T^n)^{-1}(B_p)) = \ldots \text{ »}$$

(l'interversion des limites étant parfois justifiée par : « parce que tous les termes sont positifs »)

I.- 2° - De nombreux candidats sont gênés par les calculs du premier alinéa de a. ou du deuxième alinéa de b., soit qu'ils y renoncent, soit qu'ils s'en tirent après plusieurs pages de développements et regroupements de termes menés sans aucun ordre ; dans le calcul du deuxième alinéa de b., il faut aussi faire attention à l'emploi des valeurs absolues (on a $E(|X|) \geq |E(X)|$, et non le contraire).

Par ailleurs, peu de candidats savent démontrer que, de $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = 0$, on peut déduire que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i \in <o,n<} \left(\frac{1}{n} \sum_{j \in <o,n<} d_{|k_i - k_j|} \right) = 0 \ ;$$

une erreur très grossière, mais plusieurs fois rencontrée, est d'invoquer ici des résultats sur les séries (en particulier la convergence de la série de terme général $1/n^2$) ; mais l'erreur la plus fréquente consiste à dire « on applique deux fois le théorème sur la convergence d'une suite au sens de Césaro » (souvent après avoir démontré le dit théorème, ce qui, au niveau de l'agrégation, nous paraît inutile) : ou bien on ne précise pas à quelles suites on «l'applique», ou bien on parle de «la suite ($\frac{1}{n} \sum_{j \in <o,n<} d|k_i - k_j|$), ce qui ne veut rien dire ; très souvent aussi on trouve ici, au lieu d'un texte mathématique, des expressions imprécises (du type «somme de deux termes dont l'un est négligeable» ou « $\frac{1}{n^2}$ (quelque chose en $n^2 \times \varepsilon$)"), qui ne correspondent en général pas au raisonnement correct qu'il eût fallu faire.

Enfin, si on sait en général que la convergence en moyenne d'ordre 2 entraîne la convergence stochastique, on croit souvent que la convergence stochastique entraîne la convergence en moyenne d'ordre 1 (ce n'est vrai que si les variables aléatoires sont uniformément intégrables, ce qui est le cas ici, puisqu'elles sont uniformément bornées).

I - 3° -

a. Question très élémentaire ; il suffit de l'aborder avec méthode pour s'assurer que les seules probabilités conservées par T sont celles qui sont uniformes sur chaque orbite de T, et que les seules qui soient mélangeantes sont les mesures de Dirac en un point conservé par T ; c'est, semble-t-il, cette méthode (ainsi que peut-être, dans certains cas, les connaissances élémentaires sur la décomposition des substitutions) qui fait défaut à plusieurs candidats.

b. Les réponses correctes sont oui, puis non : la plupart des candidats ayant abordé cette question le voient, mais assez rares sont ceux qui l'ont démontré ; il faut utiliser le I 1°, en prenant pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des unions finies d'intervalles.

c. Ici encore, il faut utiliser le I 1°. De nombreux candidats veulent le faire, mais la majorité d'entre eux prend pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de la forme $(X_n)^{-1}(B)$, où n est un entier et B est une partie borélienne de $\mathbb{R}$ (et n'a alors plus besoin de l'hypothèse d'indépendance) ; or cet ensemble de parties n'est pas un clan ; il faut prendre pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des unions finies d'intersections finies des parties du type précédent ; la démonstration fait alors bien intervenir l'indépendance des variables aléatoires X_n (sans quoi le résultat serait faux).

Deuxième Partie

Sur 356 copies corrigées dans l'agrégation masculine, 252 se sont vu attribuer la note 0 pour cette partie, soit qu'elles ne l'abordent pas (c'est-à-dire, pour nombre d'entre elles, soient passées directement au III), soient qu'elles n'y disent rien de valable (dans certaines, par exemple, on traite les probabilités par rapport à des sous-tribus comme s'il s'agissait de probabilités par rapport à des événements). Il semble donc qu'il y ait là, dans les connaissances des candidats, une lacune assez généralisée.

II. - 1° -

Le a. et le b. sont quasiment des questions de cours sur l'espérance conditionnelle et, une fois abordés avec les outils nécessaires, sont en général correctement effectués.

La solution du c. consiste à remarquer que la suite $(E((P^{\mathcal{B}_n}(A))^2))$ étant formée de termes réels positifs et, d'après b., décroissante, elle converge, donc est de Cauchy ; il en résulte, toujours d'après b., que la suite $(P^{\mathcal{B}_n}(A))$ est de Cauchy dans L^2, donc converge dans L^2 puisque cet espace est complet. Mais de nombreux candidats affirment dès ici (sans doute parce que, en a. et b., m et n peuvent être égaux à ∞) que $E((P^{\mathcal{B}_n}(A))^2)$ tend vers $E((P^{\mathcal{B}_\infty}(A))^2)$; cela revient à dire que toute suite décroissante de nombres réels positifs converge vers 0, et est assez souvent accompagné de «justifications» du type : « $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$ tendent à se confondre dans $\mathcal{B}_\infty$, donc ...» .

En fait ce n'est qu'en d. qu'on peut faire intervenir $P^{\mathcal{B}_\infty}(A)$ comme limite, car ce n'est autre que la constante P(A) (c'est ce qu'il faut répondre à la fin de a.) ; or $P^{\mathcal{B}_n}(A)$ tend, dans L^1, vers P(A) pour la raison suivante : la limite est, pour tout n, $\mathcal{A}_n$- mesurable ; elle est donc $\mathcal{A}_\infty$-mesurable, donc p.s. constante ; soit k cette constante ; on a alors

$$k = \int_\Omega k \, d\mathrm{P} = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega \mathrm{P}^{\mathcal{A}_n}(\mathrm{A}) \, d\mathrm{P} = \lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(\mathrm{A}) = \mathrm{P}(\mathrm{A}).$$

e. faisait intervenir, une fois encore, la définition de $\mathrm{P}^{\mathcal{A}_n}(\mathrm{A})$, et le fait que $\lim_{n \to \infty} \int_\Omega |\mathrm{P}^{\mathcal{A}_n}(\mathrm{A}) - \mathrm{P}(\mathrm{A})| \, d\mathrm{P} = 0$

II. 2° - Plusieurs candidats savent voir qu'il s'agit ici d'une application directe de la loi du tout ou rien de Kolmogorov (c'est d'ailleurs là l'origine de l'expression «transformation P-Kolmogorovienne»).

II. 3° - Question faite de calculs simples ; nombre des candidats l'ayant abordée savent la mener à bien.

Troisième Partie

Les copies où cette partie est abordée se limitent généralement aux questions suivantes : 1°, 2° a. et début de 2° b.

III. 1° et 2° a. Ces questions, quand elles sont traitées, le sont en général correctement, quoique assez lourdement (on trouve parfois deux à trois pages de raisonnement par récurrence pour s'assurer que $\varepsilon_n(\mathrm{T}(x)) = \varepsilon_{n+1}(x)$) ; la condition supplémentaire de φ – régularité nécessaire dans le cas où φ est décroissante est parfois oubliée ou mal comprise, faute sans doute d'une lecture suffisamment attentive de l'énoncé.

III. 2° - b. Il est souvent démontré que $(\Delta_s)_{s \in \mathcal{S}_n}$ est une partition de I, moins souvent qu'il s'agit d'intervalles, plus rarement encore que ces intervalles sont non vides (quoique parfois réduits à un point) ; c'est pourtant là la raison des conditions, à première vue un peu artificielles, intervenant dans la définition des suites φ– régulières.

L'étude de l'égalité $\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda(\Delta_s) = 0$ donne lieu à trois types principaux d'erreurs : la plus grossière consiste à confondre $\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \mathcal{S}_n}$ avec une limite supérieure $(\overline{\lim}_{n \to \infty})$ et, en général alors, à invoquer le théorème de Borel-Cantelli ; la plus fréquente est de démontrer seulement que $(\sup_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda(\Delta_s))$ est une suite décroissante de nombres réels positifs, et à en «déduire» que sa limite est 0 ; la plus subtile se ramène à utiliser l'existence d'un nombre réel $k > 1$, (et donc tel que $(1/k)^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini), vérifiant $|\varphi(b) - \varphi(a)| \geqslant k \, |b - a|$ pour tout couple (a, b) d'éléments de I ; or, avec nos hypothèses, ceci n'est vrai que pour φ croissante (et est en particulier faux dans le cas des développements en fraction continue).

Pour la démonstration dans le cas où φ est décroissante, ainsi que pour toute la suite du problème (qui n'a été abordée que dans de très rares copies, et encore ponctuellement), nous renvoyons le lecteur à [7] (ou à [1], 1, 4 s'il s'intéresse uniquement au cas du développement en fraction continue).

CONCLUSION

Les plus grosses lacunes proprement probabilistes relevées lors de la correction des copies nous semblent être dans les domaines suivants :

- clans et tribus (voir en particulier nos remarques sur les erreurs relevées en I.1°.a. et I.3°.c.)
- probabilités conditionnelles
- rapports entre les différents types de convergence

Par ailleurs nous remarquons des insuffisances dans :

- l'aptitude au calcul (les candidats devraient s'efforcer de mener les calculs avec plus de méthode)
- le maniement de l'analyse élémentaire (voir en particulier nos remarques sur I. 2°. et II. 1°. c.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BILLINGSLEY. *Ergodic theory and information.* Wiley, N.Y., 1965

[2] B.H. BISSINGER. A generalization of continued fractions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50 (1944), 868-876.

[3] J.R. BLUM and D.L. HANSON. On the mean ergodic theorem for subsequences. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 (1960), 308-311.

[4] P.J. EVERETT. Representation for real numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 861-869.

[5] P.R. HALMOS. *Measure Theory.* Van Nostrand, Princeton, 1950.

[6] PROGRAMMES des épreuves écrites et orales des agrégations de mathématiques (candidats et candidates) pour la session de 1970, Probabilités et Statistiques, Note du 24 septembre 1969, *Bull. Off. Ed. Nat.*, n° 37 (2-10-1969) (reconduits pour 1972 par la note du 13 juillet 1971, *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 29 (22-7-1971).

[7] A. RENYI. Representation of real numbers and their ergodic properties, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8 (1957), 477-493.

RENSEIGNEMENTS STATISTIQUES

Agrégation masculine

Nombre de copies corrigées : 356

Moyenne : 10,5 (sur 40)

Quantiles supérieurs :

- d'ordre 2 (médiane) : 9 (172 copies ont une note ⩾ 9)
- d'ordre 3 : 13 (121 copies ont une note ⩾ 13)
- d'ordre 4 : 16 (92 copies ont une note ⩾ 16)
- d'ordre 5 : 19 (73 copies ont une note ⩾ 19)

Répartition des notes par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
23	119	66	56	40	31	18	2	1

- 1 copie a obtenu la note 40.

Agrégation féminine

n = 0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
10	138	52	19	16	7	1	2	0

EPREUVES ORALES

AGREGATION HOMMES

EPREUVE D'ANALYSE - TRIGONOMETRIE - MECANIQUE

Trop de candidats ont cette année encore, et malgré des avertissements répétés, donné l'impression que pour eux l'emploi d'un certain vocabulaire considéré comme «noble», espaces de Banach, filtres, tribus, morphisme, etc... les dispensait de montrer qu'ils possédaient de solides connaissances sur les mathématiques figurant au programme et que l'on est en droit d'exiger d'un futur agrégé. Certes ils ont toujours la possibilité de placer leur leçon au niveau de leur choix, mais il est indispensable que ce choix corresponde au niveau réel de leur savoir et non à l'utilisation d'un vocabulaire ne recouvrant souvent que le néant. Si en particulier un candidat introduit dans son plan les espaces de Banach de dimension quelconque, le jury est en droit d'exiger qu'il donne des exemples et des applications correspondant à ce niveau de généralité.

L'aspect purement formel des connaissances acquises par de trop nombreux candidats est aussi illustré par des leçons où ne figurent ni exemples, ni applications éclairant les divers aspects du sujet traité. Le jury se trouve alors dans l'obligation de proposer ses propres exemples, qui sont rarement étudiés avec l'aisance souhaitable. Un candidat a donc intérêt à préparer de lui-même suffisamment d'applications significatives pour se mettre à l'abri de mauvaises surprises. Constatons à ce propos que les exposés sur le calcul numérique - qui d'ailleurs ne semblent pas avoir bonne réputation - ont conduit à des catastrophes ceux qui n'avaient réfléchi à aucun exemple, mais que par contre une des meilleures notes a été accordée sur le sujet «calcul approché des intégrales» à une étude précise et comparée de divers procédés de calcul qui ne cherchait nullement à être un catalogue plus ou moins exhaustif et superficiel des méthodes en usage aujourd'hui.

A l'opposé, il paraît nécessaire de signaler que de nombreux candidats ignorent le minimum de formalisme nécessaire à une compréhension claire des théorèmes les plus élémentaires. Ainsi ignore-t-on que la composition des fonctions permet de ne pas traiter en deux paragraphes distincts des expressions du type $\int_a^x$ et $\int_{a(x)}^{b(x)}$, que $f + g$, fg sont des fonctions pouvant s'écrire comme fonctions composées... Trop de candidats donnent l'impression d'avoir des connaissances «discrètes» en se montrant incapables de trouver le moindre lien entre les divers chapitres de l'analyse : la connexité est par exemple une notion qui ne s'introduit que dans la leçon portant ce nom et n'est d'aucun usage dans les autres.

Enfin le jury rappelle que, si les candidats sont tenus à préparer en détail, en vue de leur exposé, les démonstrations d'au moins deux des théorèmes ou exemples importants cités dans leur plan, ils doivent être capables d'analyser et de discuter les autres. Il rappelle aussi que lors d'une épreuve orale un candidat doit surveiller sa tenue, articuler le mieux possible, écrire lisiblement et sans fautes grossières d'orthographe, enfin permettre aux auditeurs de lire ce qu'il écrit et d'entendre ce qu'il dit. Beaucoup de candidats laissent supposer qu'ils tiennent un morceau de craie pour la première fois de leur vie: la suppression fréquente des oraux dans les universités ne tend-elle pas à accréditer que cette hypothèse est une réalité !

QUELQUES REMARQUES TECHNIQUES

Leçons sur les courbes et les surfaces

La plupart des candidats semblent avoir une notion très confuse de ce que l'on peut raisonnablement appeler une courbe ou une surface. Peut-être pourrait-on définir une courbe comme l'image d'une immersion d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou comme sous-variété de dimension 1, une surface comme une sous-variété de dimension 2 dans un espace de dimension 3. En fait, les candidats confondent presque tous une courbe et la manière dont un mobile est susceptible de la parcourir. La notion de tangente à une courbe devient alors très obscure, d'autant plus que la façon dont on peut définir correctement la limite d'une droite dépendant d'un paramètre (ou d'un point) est ignorée.

Une erreur fréquemment constatée est de s'imaginer que dans le cas hyperbolique ($rt - s^2 < o$) le plan tangent coupe la surface selon deux droites.

Il paraît utile de faire remarquer que, dans les leçons du type «courbes en coordonnées polaires» ou «courbes définies paramétriquement» le candidat n'a pas à faire une théorie générale des courbes, mais à expliquer sur des exemples un certain nombre de phénomènes susceptibles de se produire et à construire effectivement avec le maximum de soin, selon les conventions habituelles, des courbes sur le tableau noir.

Leçons dites élémentaires sur la théorie des fonctions

- calcul des primitives ;
- étude à partir d'exemples d'équations différentielles homogènes ;
- étude à partir d'exemples d'équations différentielles de Lagrange et de Clairaut.

Leur but est d'illustrer sur des exemples quelques théorèmes généraux, en montrant les limites de leur application. Il est donc d'autant plus important d'exiger un maximum de rigueur dans les démonstrations. Malheureusement le candidat se croit en général autorisé à adopter l'attitude inverse : les fonctions n'ont plus ni source, ni but, elles sont rarement continues et le problème de leur existence n'est jamais posé. Il s'ajoute à cela une confusion presque systématique entre une solution de l'équation différentielle, qui est une fonction d'une variable définie dans un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, une représentation paramétrique (application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) d'une courbe intégrale et une courbe intégrale (sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ayant certaines propriétés).

Comme dans toutes les leçons d'exemples, le candidat peut profiter de la grande latitude qui lui est offerte pour isoler les difficultés et restreindre son étude à un nombre limité de phénomènes intéressants qui peuvent apparaître

Intégration

Disons tout d'abord que, si le jury est loin d'être hostile aux mesures positives définies sur une tribu, il souhaiterait néanmoins que, à l'issue d'un plan ayant tourné pour l'essentiel autour de ces questions, le candidat soit capable de dire avec précision ce qu'est une fonction Lebesgue - mesurable ou Lebesgue - intégrable sur $\mathbb{R}$.

La leçon intitulée « intégrale des fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$; extention à d'autres classes de fonctions » peut donner lieu à une introduction claire et rapide du symbole $\int_a^b f(x)\,dx$, lorsque f est continue sur $[a, b]$, en considérant les sommes $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$.

Le candidat a alors le choix entre les extensions suivantes :

- Intégrales impropres des fonctions continues sur un intervalle ouvert.

- Fonctions Riemann-intégrables. Signalons à ce propos que certains plans définissent tout d'abord l'intégrale d'une fonction continue en considérant les sommes de Darboux, affirment ensuite qu'une telle fonction est Riemann-intégrable,... puis introduisent les fonctions Riemann-intégrables ; cette façon de procéder a paru peu claire au jury.

- Introduction de l'Intégrale de Lebesgue en considérant des suites croissantes de fonctions continues presque partout convergentes (la notion d'ensembles de mesure nulle pouvant être introduite élémentairement). On passe ainsi directement de la théorie de l'intégrale des fonctions continue à celle de Lebesgue en court-circuitant l'intégrale de Riemann.

Cette liste n'est évidemment pas limitative ; on pourrait aussi envisager l'intégrale de Stieltjes, etc.

Topologie de $\mathbb{C}$

Aucun candidat n'a montré que $\mathbb{C}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$, que $\mathbb{C}$ n'est pas un corps ordonnable. La leçon «topologie de $\mathbb{C}$» doit aussi être considérée comme portant sur un sujet plus précis que «topologie de $\mathbb{R}^2$».

Espaces normés

Le jury regrette que la question «à quoi sert la théorie des espaces normés ?» plonge les candidats dans des abîmes de perplexité. Ceux d'entre eux qui se limitent à un niveau élémentaire devraient néanmoins être capables de donner des exemples d'application à la résolution de problèmes d'analyse classique, utilisant les notions de parties totales et de suites uniformément bornées de formes linéaires. Quant à ceux qui citent les théorèmes de Banach, Banach-Steinhauss, etc. il serait bon qu'ils connaissent des applications désormais classiques de ces résultats (par exemple à la théorie des séries trigonométriques). Pour les leçons portant sur les espaces normés de dimension finie, supposer déjà connue la topologie de $\mathbb{R}^n$ est maladroit. Des considérations géométriques sont indispensables si l'on veut exploiter convenablement la notion de norme, mieux adaptée à la structure vectorielle que celle de distance. Malheureusement le lien entre parties ouvertes convexes symétriques bornées et normes est souvent ignoré, de même que les propriétés des ensembles convexes. Toutefois un candidat a su habilement montrer en dimension finie, qu'une partie convexe fermée est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent en introduisant une norme euclidienne. On aimerait aussi que les candidats insistent sur des propriétés propres au cas de la dimension finie ; rapports entre ouverts et pavés, expression d'un ouvert comme réunion d'une suite croissante de parties compactes, etc.

Extremum et fonctions convexes

Dans les deux cas les candidats négligent d'indiquer les résultats plus particuliers obtenus pour les fonctions d'une variable réelle. Ainsi le fait que les fonctions convexes sont des intégrales définies de fonctions croissantes semble être ignoré. L'utilisation des fonctions convexes pour résoudre des problèmes d'extremum est rarement citée. Enfin le jury tient à signaler que trois candidats ont utilisé pour les formes quadratiques positives définies sur un espace de Banach quelconque une notion de «non dégénérescence» topologique, sans se rendre compte qu'en dimension infinie elle diffère de la notion algébrique classique. Aucun candidat non plus n'a évidemment noté que l'existence d'une telle forme quadratique impliquait que l'espace était «hilbertisable».

Différentielles

Dans trop de cas une analogie formelle avec le cas d'une variable conduit les candidats à commettre de graves confusions ; ainsi les liens entre la $\mathbb{C}$ - dérivation et la $\mathbb{R}^2$-dérivation ne sont pas suffisamment dégagés. Les candidats auraient intérêt à se restreindre aux fonctions continûment différentiables sur un ouvert, dès qu'il ne s'agit plus de fonctions d'une variable réelle ; cela leur éviterait de s'aventurer sur un terrain hérissé de contre-exemples pathologiques, que la plupart ignore d'ailleurs. En ce qui concerne les différentielles d'ordre supérieur à 1, affirmer que ce sont des formes multilinéaires symétriques ne dispense pas de préciser soigneusement, en dimension finie, leur expression en fonction des dérivées partielles. A ce propos, et spécialement lorsqu'il s'agit de la formule de Taylor, on peut regretter que l'usage des multi-indices soit ignoré. Toujours à propos de la formule de Taylor, sa version avec reste intégral est souvent oubliée et la différence vis-à-vis du calcul numérique entre la formule de Taylor-Young et la formule de Taylor avec reste de Lagrange n'est pas perçue.

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Trop de candidats s'appuient sur les théorèmes généraux d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles pour résoudre le cas particulier des équations différentielles linéaires à coefficients constants, qui sont susceptibles d'être traitées par voie purement algébrique. La recherche pratique des solutions est toujours négligée :

- dans le cas où l'on veut des solutions réelles, il est nécessaire de reconnaître dans l'ensemble des solutions, trouvées à valeurs dans $\mathbb{C}$, celles qui sont effectivement à valeurs réelles ;

- dans le cas d'une équation avec un second membre de la forme exponentielle polynôme il est utile de savoir les formes bien connues d'une solution particulière sans avoir recours à la méthode dite de «variation de la constante».

Séries de fonctions, séries entières

La plupart des candidats ne peuvent présenter d'autre exemple de série de fonctions que les séries entières. Certains, qui ne traitent la question que dans les Banach, ne connaissent même pas la notion de convergence en moyenne. La notion de convergence uniforme sur une famille de parties de l'ensemble de définition des fonctions est ignorée au point que certains candidats essayent de montrer la convergence uniforme des séries entières sur tout le disque de convergence. On confond d'ailleurs trop souvent la recherche du disque de convergence et celle du domaine de convergence ; le disque de convergence d'une série entière est un domaine dans lequel existe un prolongement analytique de la fonction représentée par la série. La notion d'analycité n'est d'ailleurs jamais clairement dégagée, ce qui conduit à des confusions graves entre fonctions C^{∞}, dont la série de Taylor converge, et fonctions analytiques.

Limites

Il en est des filtres comme des espaces de Banach ; leur définition n'est illustrée d'aucun exemple montrant que leur introduction peut s'avérer réellement utile (produit d'espaces compacts par exemple). Le seul exemple qu'on puisse obtenir est celui du filtre de Fréchet ; encore qu'il arrive que des candidats ne sachent pas le comparer à un filtre dont on connaît explicitement une base.

En ce qui concerne les sommes de Darboux, certains candidats parlent de leur limite sans se préoccuper de donner un sens précis à ce terme.

Dans le cas de IR, il est impossible d'obtenir sur les limites supérieures et inférieures plus que leur définition ; on ne peut savoir si ce sont des valeurs d'adhérence de la suite.

Le fait que Q est dense dans IR ne conduit pas à fournir des exemples de représentations des nombres réels par des suites de nombres rationnels, alors que la numération et les fractions continues sont explicitement au programme.

Enfin la «vitesse de convergence» d'une suite vers sa limite est ignorée, ce qui est particulièrement grave pour ceux qui ont à traiter du calcul numérique.

EXPOSES D'ANALYSE

1. *Espaces métriques compacts ; applications.*
2. *Espaces métriques complets ; théorème du point fixe.*
3. *Espaces métriques compacts ; espaces métriques complets.*
4. *Produit de deux espaces topologiques. Applications.*
5. *Espaces vectoriels normés.*
6. *Espaces normés de dimension finie.*
7. *Définition et propriétés de l'ensemble $\underline{R}$ des nombres réels.*
8. *Approximation d'un nombre réel par des rationnels.*
9. *Topologie de $\underline{R}^n$.*
10. *Espaces connexes. Parties connexes de $\underline{R}$. Applications.*
11. *Topologie de $\underline{C}$. Applications (par exemple : le théorème de d'Alembert-Gauss).*
12. *Suites numériques. Limites, limite supérieure, limite inférieure.*
13. *Suites définies par une relation de récurrence.*
14. *Limites.*
15. *Fonctions continues.*
16. *Fonctions croissantes.*
17. *Fonctions inverses (ou réciproques) ; fonctions implicites.*
18. *Fonctions implicites ; applications géométriques.*
19. *Fonctions convexes d'une ou plusieurs variables ; inégalités de convexité.*
20. *Les différentes notions de convergence.*
21. *Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions, intégrales).*
22. *Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables ; changement de variables ; exemples.*
23. *Fonctions de plusieurs variables : formule des accroissements finis et formule de Taylor ; applications.*
24. *Applications continûment différentiables d'un ouvert de $\underline{R}^n$ dans $\underline{R}^p$.*
25. *Les différentes formules de Taylor.*
26. *Applications des formules des accroissements finis et de Taylor aux problèmes de calcul numérique.*
27. *Extremum.*

28. *Comparaison de fonctions au voisinage d'un point.*

29. *Applications de la méthode des développements limités ou asymptotiques.*

30. *Recherche pratique des limites : analyse des différentes méthodes permettant de montrer qu'une fonction a une limite.*

31. *Fonction logarithme, fonction exponentielle d'une variable réelle.*

32. *Fonction* e^z *pour* z *complexe.*

33. *Extensions de la notion de fonction exponentielle.*

34. *Fonctions circulaires directes et inverses.*

35. *Méthodes permettant d'étendre le domaine de définition d'une fonction ; prolongement des identités fonctionnelles ; exemples.*

36. *Théorie de l'intégrale.*

37. *Intégration des fonctions continues sur un segment de* $\underline{R}$. *Extension de la notion d'intégrale à d'autres classes de fonctions.*

38. *Méthodes pratiques de recherche des primitives et de calcul des intégrales.*

39. *Intégrales impropres ; exemples.*

40. *Fonctions définies par une intégrale.*

41. *Intégrale curviligne.*

42. *Calcul approché d'une intégrale.*

43. *Séries à termes réels ou complexes.*

44. *Liaison entre la théorie de l'intégrale et la théorie des séries numériques.*

45. *Suites et séries de fonctions.*

46. *Séries entières.*

47. *Opérations sur les séries numériques.*

48. *Opérations sur les séries de fonctions ; exemples.*

49. *Méthodes de développement en série entière.*

50. *Série de Taylor d'une fonction.*

51. *Les problèmes d'interversion de limites en analyse ; application aux séries et aux intégrales.*

52. *Equations différentielles linéaires.*

53. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*

54. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles de Lagrange et de Clairaut.*

55. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles homogènes.*

56. *Equation différentielle linéaire* $y' + A(x)y = B(x)$, *dans laquelle A et B sont développables en série entière au voisinage de zéro.*

57. *Exemples de problèmes géométriques résolus à l'aide d'équations différentielles.*

58. *Courbe ; droite tangente.*

59. *Surface ; plan tangent.*

60. *Etude locale des courbes : propriétés affines.*

61. *Etude locale des courbes : propriétés métriques.*

62. *Tracé des courbes planes définies par* $\vec{OM} = \vec{f}(t)$. *Exemples.*

63. *Tracé des courbes planes définies en coordonnées polaires par* $\rho = f(\theta)$ *; exemples.*

64. *Application de la théorie des développements limités ou asymptotiques au tracé des courbes planes.*

65. *Courbure et centre de courbure pour une courbe plane.*

66. *Mouvements à accélération centrale.*

67. *Mouvement relatif, changement de repère, applications.*

68. *Cinématique du solide.*

69. *Mouvement d'un repère orthonormé ; application à la théorie métrique des courbes gauches et à la cinématique du solide.*

70. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

EPREUVE D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

Le jury se doit de rappeler à nouveau qu'une épreuve orale ne peut s'improviser en trois heures : l'absence d'une préparation appliquée et sérieuse est flagrante chez de nombreux admissibles - et parmi les meilleurs -. Les candidats doivent se persuader qu'une année consacrée à la préparation du concours n'est pas trop longue pour la tâche à accomplir : se cultiver, réfléchir sur le programme et l'approfondir, apprendre à mettre en forme un exposé. Comme chaque année, le jury ne peut que déplorer :

- le trop grand nombre de leçons insuffisamment fouillées et dominées,
- la pauvreté de plans constitués par une suite de définitions,
- la rareté et la banalité des exemples et applications,
- l'abus des répétitions de trivialités,
- et aussi la désaffection pour la géométrie.

Cette désaffection constitue d'ailleurs un risque certain, car des couplages de deux sujets de géométrie, empruntés à des chapitres différents du programme, ont été donnés.

La première partie de l'épreuve (vingt minutes au maximum) est consacrée au plan. Celui-ci ne doit pas être un simple compte rendu de lecture, ni la recopie d'un livre, aussi bien fait soit-il ; il s'agit d'établir une synthèse, qui ne soit pas une compilation et la personnalité du candidat doit se manifester dans le choix, l'ordre et la présentation des questions traitées.

Une grande liberté est laissée au candidat pour la détermination du niveau de son travail. Qu'il n'oublie pas cependant qu'un minimum est fixé par le programme de l'oral et par les instructions : il y est précisé que le candidat doit dominer le programme des classes du second degré et des classes préparatoires et que le jury peut interroger sur toutes les questions inscrites au programme en rapport avec le sujet traité. Certaines leçons, restées à peine au niveau d'une classe terminale des lycées, ont été dans ces conditions jugées insuffisantes, surtout si les interrogations du jury sont restées sans réponse.

Tout candidat doit avoir le souci de donner des motivations non triviales et surtout des illustrations. Même si le texte ne le précise pas, il doit proposer des exemples et des applications en les cherchant dans toutes les parties du programme, quitte bien entendu à ne pas les préparer en détail en vue d'un exposé complet. Mais le candidat doit être capable de répondre à cette question que trop souvent le jury a été amené à poser : où utilise-t-on les notions que vous venez d'introduire ? (exemples : signature d'une permutation, sous-espaces propres ou stables, décomposition en éléments simples, division suivant les puissances croissantes, dualité en algèbre, formes bilinéaires...).

Pour les théorèmes importants, il faut donner un énoncé complet et précis et on peut, en quelques mots, indiquer au cours du plan l'idée de la démonstration. Ces théorèmes doivent être bien circonscrits, des exemples ou contre-exemples montrant le rôle des hypothèses ; il n'est pas raisonnable de supposer par exemple qu'un corps est commutatif ou de caractéristique différente de 2 sans savoir où intervient cette hypothèse. D'autre part se contenter d'un simple théorème d'existence est souvent insuffisant ; il est indispensable de connaître, lorsqu'ils existent, les algorithmes permettant de construire la solution et d'être capable, si le jury le propose, d'aller jusqu'à une application numérique (exemples : changement de base, trigonalisation d'une matrice, identité de Bezout pour deux polynômes avec condition sur les degrés...).

A la fin du plan le candidat est tenu d'indiquer un choix de points intéressants ou importants, démonstrations ou applications, qu'il a spécialement préparés en vue de l'exposé. Il convient de citer au moins deux points qui comportent des raisonnements significatifs ne se réduisant pas à des trivialités : que dire d'un candidat qui, dans une leçon sur les applications d'un ensemble dans un ensemble offre pour l'exposé le seul théorème : si f est bijective, il existe une application réciproque ?

Quelques conseils pratiques :

- les rappels sont nécessaires ; ils ne doivent pas être abusifs (un candidat leur a consacré dix-huit minutes) ;
- pour faciliter la discussion du plan, le tableau doit porter trace de tous les points abordés, sans aller évidemment jusqu'à l'écriture de phrases entières et même de tout le plan ;
- ne pas craindre en géométrie de faire des figures soignées et claires, et d'utiliser le langage des groupes opérant sur un ensemble.

REMARQUES PARTICULIERES A PROPOS DE LEÇONS DIVERSES

Analyse combinatoire. Le candidat doit connaître les combinaisons avec répétition, être capable de développer $(x_1 + \dots x_k)^n$, de trouver la dimension de l'espace des polynômes à plusieurs indéterminées de degré inférieur ou égal à p, de donner des exemples non triviaux de problèmes de dénombrement. Une application, tout indiquée, aux probabilités doit être présentée de façon correcte et non de manière floue et imprécise.

Groupe symétrique. La décomposition d'une permutation en produit de cycles est explicitement au programme.

Anneaux. Il faut indiquer d'autres exemples d'anneaux principaux que $\mathbb{Z}$.

Nombres complexes. Il est bon de connaître plus d'une construction de $\mathbb{C}$, et indispensable de montrer que le problème du prolongement, que l'on pose, a une solution unique à un isomorphisme près ; ne pas oublier de parler des nombres complexes conjugués, de vérifier que le module est une norme.

Fonctions rationnelles à une indéterminée. La leçon doit comprendre la pratique de la décomposition sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec le cas des pôles multiples.

Polynômes à plusieurs indéterminées. La construction manque souvent de clarté, et indique seulement une construction par récurrence dans laquelle les indéterminées ont des rôles dissymétriques ; les dérivées partielles, l'interversion des dérivations, la formule de Taylor, les polynômes homogènes, l'opération de substitution sont des sujets peu abordés et utilisés.

Polynômes symétriques. L'opération de symétrisation est ignorée.

Divisions dans K [X]. La division suivant les puissances croissantes est présentée de façon lourde sans aucune application.

Sous-espaces vectoriels. Les candidats oublient le plus souvent de parler d'espace-quotient, ainsi que de l'isomorphisme canonique des supplémentaires du sous-espace E_1 avec E/E_1, et de l'isomorphisme de deux supplémentaires de E_1 par la projection parallèle à E_1.

Opérations sur les matrices. Des définitions non intrinsèques sont souvent données pour les opérations.

Dualité. Les leçons sur ce sujet manquent d'applications (exemples : conjugaison dans la théorie des coniques, intersection d'hyperplans indépendants, isomorphisme canonique entre $\mathscr{L}(E, E; K)$ et $\mathscr{L}(E ; E^*)$...)

Formes quadratiques. Rappelons que les formes quadratiques peuvent être définies directement par les deux propriétés :

a) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

b) l'application $(x, y) \longmapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ est bilinéaire

Ne pas oublier d'étudier le rapport entre rang et noyau, ainsi que la restriction à un sous-espace.

Complexifié d'un espace vectoriel réel. Les candidats n'étudient pas les complexifiés des sous-espaces et ignorent qu'un espace vectoriel complexe donné n'est pas canoniquement le complexifié d'un espace vectoriel réel.

Une application intéressante de cette leçon est que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2, ce qui établit un lien avec les deux autres leçons sur les sous-espaces stables et sur le groupe orthogonal réel.

Sous-espaces propres, sous-espaces stables. La partie « sous-espaces stables » est en général très pauvre ; on peut noter que la recherche des vecteurs propres du transposé d'un endomorphisme u revient à celle des hyperplans stables par u.

Groupe orthogonal réel. La décomposition d'une matrice orthogonale en blocs diagonaux de dimension 1 ou 2 est au programme.

Barycentre. La définition et l'usage des coordonnées barycentriques sont à connaître, ainsi que les applications euclidiennes (exemple : formule de Leibniz).

Inversion dans le plan. Les candidats ne savent pas établir rapidement et correctement les théorèmes sur l'inverse d'une droite ou d'un cercle ; ils ne voient pas le lien entre l'inversion et le groupe circulaire du plan.

Répartition des notes

308 candidats sur 314 admissibles ont participé à l'épreuve orale d'algèbre et géométrie. Les notes sont ainsi réparties :

$0 \leqslant n \leqslant 9$	$10 \leqslant n \leqslant 19$	$20 \leqslant n \leqslant 29$	$30 \leqslant n \leqslant 39$	$40 \leqslant n \leqslant 49$	$50 \leqslant n \leqslant 59$	$60 \leqslant n \leqslant 69$	$70 \leqslant n \leqslant 80$
31	46	47	52	46	43	28	15

EXPOSES D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

1. *Analyse combinatoire. Applications.*
2. *Relations d'ordre. Exemples et applications.*
3. *Applications d'un ensemble dans un ensemble. Exemples.*
4. *Groupe symétrique.*
5. *Exemples de groupes.*
6. *Sous-groupes. Groupe quotient. Exemples et applications.*
7. *Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.*
8. *Idéaux d'un anneau. Exemples et applications.*
9. *Anneaux commutatifs intègres. Corps des fractions.*
10. *Corps. Exemples.*
11. *Algèbre sur un anneau commutatif. Exemples.*
12. *Corps des nombres complexes.*
13. *Divisibilité dans un anneau intègre. Exemples.*
14. *Anneaux principaux. Exemples.*
15. *Nombres premiers.*
16. *Anneau des classes résiduelles modulo n.*
17. *Numération. Notion de base. Anneau des nombres décimaux.*
18. *Polynômes à une indéterminée.*
19. *Polynômes à plusieurs indéterminées. Dérivation. Applications.*
20. *Fonctions polynômes.*
21. *Racines d'un polynôme. Multiplicité. Exemples.*
22. *Polynômes symétriques.*
23. *Divisions dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif. Applications.*
24. *Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif.*
25. *Sous-espaces d'un espace vectoriel. Somme et intersection de sous-espaces. Somme directe. Exemples et applications.*

26. *Dimension et rang en algèbre linéaire.*
27. *Dualité en algèbre linéaire. Applications.*
28. *Opérations sur les matrices, matrices équivalentes, matrices semblables.*
29. *Exponentiation d'une matrice.*
30. *Déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice carrée. Propriétés.*
31. *Applications multilinéaires. Formes multilinéaires alternées. Exemples.*
32. *Systèmes d'équations linéaires.*
33. *Complexification d'un espace vectoriel réel et d'une application linéaire. Applications.*
34. *Sous-espaces vectoriels propres, sous-espaces vectoriels stables d'un endomorphisme. Applications.*
35. *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*
36. *Trigonalisation, diagonalisation d'une matrice. Applications.*
37. *Formes bilinéaires. Rang. Matrice. Changement de bases. Applications.*
38. *Formes quadratiques. Conjugaison. Noyau. Restriction à un sous-espace.*
39. *Décomposition d'une forme quadratique en carrés. Cas réel.*
40. *Groupe orthogonal réel. Matrices orthogonales. Réduction.*
41. *Groupe unitaire. Matrices unitaires. Réduction.*
42. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*
43. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*
44. *Espace euclidien orienté de dimension 3. Produit mixte, produit vectoriel. Applications.*
45. *Espaces affines. Applications affines. Sous-espaces. Affines. Repère affine.*
46. *Barycentre. Applications.*
47. *Convexité dans les espaces affines réels. Applications.*
48. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repère projectif.*
49. *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective. Eléments à l'infini.*
50. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension n. Déplacements et antidéplacements.*
51. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien. Problèmes d'angles et de distances.*
52. *Groupe des rotations du plan euclidien. Angle de deux vecteurs non nuls. Angle de deux droites.*
53. *Similitudes directes et indirectes dans le plan. Formes réduites. Groupe des similitudes.*
54. *Exemples de groupes d'isométries laissant globalement stable une partie de l'espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.*
55. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 2 et 3. Formes réduites.*
56. *Inversion dans le plan. Applications.*
57. *Inversion dans le plan. Groupe circulaire du plan.*
58. *La sphère.*
59. *Torseurs.*
60. *Droite projective. Homographie. Involution .*
61. *Rang d'une quadrique. Eléments conjugués. Applications.*
62. *Equation tangentielle d'une conique non dégénérée. Enveloppes de seconde classe.*
63. *Exemples de faisceaux linéaires de coniques. Théorème de Desargues. Applications.*
64. *Complété projectif du complexifié d'un plan affine euclidien. Points cycliques. Applications.*
65. *Propriétés projectives des coniques non dégénérées.*
66. *Propriétés métriques des coniques non dégénérées.*
67. *Représentations rationnelles propres des coniques non dégénérées. Applications.*
68. *Coniques dans le plan affine réel : diamètres, propriétés des diamètres. Equations réduites. Cas euclidien : directions principales, axes de symétrie. Applications.*

AGREGATION FEMMES
RAPPORT SUR LES EPREUVES DEFINITIVES (ORAL)

REMARQUES GENERALES

Lors de l'épreuve d'analyse, comme lors de l'épreuve d'algèbre, trop de candidates ont donné l'impression de ne pas savoir faire un bon usage des livres mis à leur disposition ; elles semblent s'être précipitées sur eux, y avoir relevé rapidement un plan, y avoir recopié plus hâtivement encore quelques démonstrations ; ceci pour lire finalement le tout au jury. Or les sujets demandés sont des sujets de synthèse pour lesquels une certaine réflexion, sans documents, est féconde ; bien entendu il est nécessaire, pour faire un exposé cohérent, d'avoir, pendant l'année, étudié et réfléchi sur le programme ; on ne peut, en trois heures reconstituer tout.

Le jury rappelle avec insistance que la candidate doit «indiquer au jury un choix de points qu'elle juge importants dans son étude». Cette indication ne peut évidemment se limiter à une seule question (le jury ne pourrait alors exercer le choix qu'il a le devoir d'exercer) ; on n'y peut faire valablement figurer un lemme non essentiel ou un exercice sans intérêt.

Quelques questions d'algèbre ont été d'une pauvreté affligeante, sans exemples, et avec encore moins d'applications : une candidate ne connaissait comme anneaux que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; une autre après un exposé convenable sur les formes quadratiques a été hors d'état de décomposer en carrés $xy+yz+zx$; une autre encore, après en avoir présenté correctement la théorie, n'a pas su pratiquement commencer la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples ; ni une autre enfin, appliquer une présentation correcte du théorème fondamental sur les polynomes symétriques à une transformation de

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 .$$

La liberté qu'ont actuellement les Universités de fixer elles-mêmes pour la maîtrise le choix des unités de valeur qui la composent est peut-être une des raisons pour lesquelles certaines candidates ont montré de graves lacunes en analyse. Mais la préparation à l'agrégation aurait dû être, pour elles, l'occasion de compléter leurs connaissances insuffisantes ; comme elle doit être, pour les candidates qui avaient déjà fait sérieusement de l'analyse, l'occasion d'un travail de synthèse et de retours en arrière qui, à de futurs professeurs et de futurs chercheurs, sont indispensables.

Les remarques, critiques en général, qui suivent concernent des exposés précis, les premiers d'algèbre, les autres d'analyse. Mais il convient de dire que le jury a eu la satisfaction d'en entendre aussi de bons, de très bons et même d'excellents et qu'il cherche moins une érudition, qui n'est pas normalement de l'âge des candidates et qui, au fond, importe peu, que les qualités d'esprit et la sûreté indispensables à leur futur métier. Sous ce rapport et tout en espérant des progrès nouveaux, il pense que les agrégées du concours de 1972 sauront, comme celles des années précédentes, faire face aux tâches importantes qui leur seront confiées.

REMARQUES PARTICULIERES AUX EXPOSES D'ALGEBRE

Analyse combinatoire. Cette question a eu peu de succès ; elle a été, en général, mal traitée.

Numération. Cette question n'a été choisie qu'une seule fois.

Groupe symétrique. Question souvent prise - sous des titres divers - ; l'étude de la signature reste une épreuve délicate.

Corps des complexes. Question peu choisie. Elle a pourtant donné lieu à un très bon exposé.

Résultant de deux polynômes. Certaines candidates arrivent à en parler, sans jamais le définir d'une manière précise. Toutefois une excellente note a été attribuée à une candidate sur ce sujet.

Espaces vectoriels. Il est singulier que les candidates soient embarrassées par la question des sous-espaces d'un espace de dimension finie.

Système d'équations linéaires. Beaucoup de candidates n'ont pas pu introduire correctement les «déterminants caractéristiques».

Espaces hermitiens. Il y a eu de bons exposés sur ce sujet. Mais d'autres candidates n'arrivent pas à donner les justifications indispensables lors de la définition de l'adjoint d'un endomorphisme.

Polynôme minimal. Il y a eu de bons exposés ; mais quelques candidates ne savent pas les utiliser sur un exemple.

Géométrie. Certaines candidates avaient fait un effort particulier et la géométrie a eu plus de succès que les années précédentes. Le jury rappelle d'ailleurs que les deux sujets proposés au choix de la candidate peuvent être, tous les deux, de géométrie.

Malgré cela d'énormes lacunes subsistent : certaines candidates ne croient pas légitime de faire des «figures» qui, pourtant les aideraient considérablement. D'autres semblent plus à l'aise dans un espace de dimension n que dans un espace de dimension deux : la détermination d'une similitude plane directe par deux couples de points homologues, par exemple, semble une question insurmontable.

REMARQUES PARTICULIERES CONCERNANT LES EXPOSES D'ANALYSE

Constructions de R. Il est indispensable de montrer que les différentes constructions présentées de R définissent bien (à un isomorphisme près) le même ensemble.

Fonctions réelles (resp. ***vectorielles) d'une variable réelle.*** Le sujet est si vaste que les candidates doivent se limiter et choisir. Mais il ne faut pas se limiter à des banalités.

Applications à valeurs réelles. Il s'agit d'étudier les applications définies sur un espace topologique (sur un ouvert de R^n pour la différentiabilité) et à valeurs réelles. Leurs propriétés particulières viennent de ce qu'elles sont à valeurs dans R et non dans R^p. Se limiter aux fonctions numériques d'une variable réelle est commettre une erreur d'interprétation du texte.

Développements limités et applications. Il n'y a presque pas de chapitre d'un cours d'analyse de premier cycle qui n'utilise cette notion. Or de nombreuses candidates semblent ne connaître comme application que les formes indéterminées.

Limites. C'est le type même d'un sujet de synthèse. Il comporte normalement des indications sur des critères d'existence de limites. Une candidate qui choisit un tel sujet doit connaître des théorèmes sur l'interversion des limites.

Point d'accumulation. Il est indispensable d'en donner une définition précise.

Logarithme complexe. La partie délicate est de bien définir et utiliser à cette occasion la notion d'argument.

Fonctions homogènes. Il faut connaître des applications de cette notion ; elles sont nombreuses et importantes.

Primitives et intégrales. Il est évidemment indispensable de préciser les relations entre ces deux notions.

Equations différentielles $A(x)y' + B(x)y = C(x)$. Il faut, bien entendu, dire ce qui se passe au voisinage d'un point x_o où $A(x_o)$ est inversible. Mais une partie indispensable est l'étude des solutions au voisinage d'un point où $A(x_o)$ n'est pas inversible et l'étude des solutions maximales. Il est recommandé de se limiter à R.

Formes différentielles de degré un. Si l'on s'en tient au programme de l'oral, il convient de définir une forme différentielle de degré un, de parler de son intégration sur un arc de courbe (intégrale curviligne), de donner quelques indications sur les équations de la forme $Pdx + Qdy = 0$ et leurs courbes intégrales. Il est dangereux d'évoquer les produits extérieurs et la dérivation extérieure (qui ne figurent pas au programme de l'oral) sans avoir des connaissances précises en la matière.

Problèmes d'extremum. Il y a certainement lieu de présenter la recherche des extremums relatifs dans un ouvert; mais le sujet est beaucoup plus général : fonctions réelles continues sur un compact, principe du module maximum pour les fonctions holomorphes, distance d'un point à un convexe fermé d'un espace de Hilbert...

Mécanique. Trop souvent les candidates ne savent pas le sens mathématique exact des mots qu'elles emploient: Il est, par exemple, question d'«angles» dépendant du temps. Pour les unes il s'agit d'une application d'une partie de R dans l'ensemble des angles de demi-droites (isomorphe à S_1) ; mais alors elles ne savent pas comment expliquer qu'une rotation de 2π radians par seconde n'est pas égale à une rotation de 0 radian par seconde. Pour d'autres il s'agit de l'application de R dans R faisant correspondre à $t \in R$, une mesure $\theta(t)$ de l'angle à l'instant t. Personne n'a pu expliquer qu'une fois le nombre réel $\theta(t_o)$ choisi pour un certain t_o, la fonction θ de R dans R est parfaitement déterminée pour des mouvements continus. La notion de relè-

vement d'une application continue de R dans S serait-elle hors de portée des candidates à l'agrégation ? La même difficulté se retrouve en géométrie différentielle où on désigne par une lettre α , l'«angle polaire» de la tangente à une courbe plane, et où l'on parle (s étant l' abscisse curviligne) de $\alpha'(s)$ et de $\frac{ds}{d\alpha}$.
Les candidates en question ne font qu'un jeu d'écriture ; elles ne savent pas bien, en général, de quoi elles parlent.

Liste des sujets d'algèbre

1. *Applications d'un ensemble fini dans lui-même.*
2. *Analyse combinatoire.*
3. *Relation d'ordre ; exemples et applications.*
4. *Relation d'équivalence compatible avec une structure algébrique.*
5. *Structures algébriques quotients.*
6. *Groupes finis ; exemples.*
7. *Systèmes de générateurs d'un groupe ; exemples.*
8. *Groupe symétrique.*
9. *Sous-groupes distingués ; exemples.*
10. *Groupe opérant sur un ensemble ; applications.*
11. *Structure d'anneau ; exemples.*
12. *Anneaux quotients de Z.*
13. *Notion d'idéal ; applications.*
14. *Divisibilité dans les anneaux intègres.*
15. *Corps : sous-corps, corps premier, caractéristique.*
16. *Corps des nombres complexes.*
17. *Numération. Nombres décimaux.*
18. *Anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif : factorisations et applications.*
19. *Anneaux des polynômes à* p *indéterminées.*
20. *Polynômes symétriques à* p *indéterminées.*
21. *Division des polynômes suivant les puissances croissantes et applications.*
22. *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*
23. *Polynôme dérivé. Formule de Taylor.*
24. *Résultant de deux polynômes. Elimination.*
25. *Corps des fractions rationnelles à une indéterminée.*
26. *Fonctions polynômes associées à un polynôme à une ou plusieurs indéterminées.*
27. *Bases et dimension dans les espaces vectoriels ; applications.*
28. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
29. *Applications linéaires. Espaces vectoriels quotients.*
30. *Espaces vectoriels de dimension finie : base. Rang d'une application linéaire.*
31. *Rang d'une application linéaire. Groupe linéaire.*
32. *Espace vectoriel de dimension finie : endomorphismes, automorphismes.*
33. *Dualité dans les espaces vectoriels.*
34. *Matrices et applications linéaires.*
35. *Calcul matriciel.*
36. *Formes multilinéaires ; formes multilinéaires alternées.*
37. *Déterminants.*
38. *Applications des déterminants.*

39. *Systèmes d'équations linéaires.*
40. *Valeurs propres ; vecteurs propres.*
41. *Formes réduites de la matrice d'un endomorphisme.*
42. *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*
43. *Formes quadratiques. Décomposition en carrés*
44. *Réduction d'une forme quadratique.*
45. *Espaces vectoriels euclidiens.*
46. *Groupe orthogonal en dimension finie.*
47. *Espaces vectoriels hermitiens.*
48. *Groupe unitaire en dimension finie.*
49. *Matrices unitaires, hermitiennes, symétriques réelles. Diagonalisation.*
50. *Adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien.*
51. *Espace affine de dimension finie. Groupe affine.*
52. *Barycentres, formes affines et convexité (espace affine réel).*
53. *Parties convexes d'un espace affine réel, enveloppe convexe d'une partie, faces.*
54. *Espace projectif de dimension n ; lien avec l'espace affine.*
55. *Groupe projectif dans l'espace projectif de dimension n.*
56. *Dualité dans les espaces projectifs.*
57. *Groupe projectif de la droite projective complexe.*
58. *Homographies.*
59. *Isométries dans le plan affine euclidien.*
60. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension trois.*
61. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension n.*
62. *Isométries de R^2 euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*
63. *Isométries de R^3 euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*
64. *Notion d'angle.*
65. *Similitudes directes et inverses dans le plan affine euclidien.*
66. *Similitudes dans R^3 euclidien.*
67. *Inversion plane ; groupe circulaire.*
68. *Inversion dans l'espace, sphères et cercles.*
69. *Torseurs dans R^3. Equiprojectivité.*
70. *Pôles et polaires en géométrie plane.*
71. *Pôles et polaires en géométrie dans l'espace.*
72. *Quadriques dans un espace projectif de dimension n : propriétés projectives.*
73. *Propriétés projectives des coniques ; dualité.*
74. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*
75. *Propriétés affines des coniques.*
76. *Propriétés métriques des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*
77. *Propriétés focales des coniques.*

Liste des sujets d'analyse

1. *Construction du corps des réels.*
2. *Approximation des nombres réels.*
3. *Fractions continues.*
4. *Fonctions réelles d'une variable réelle.*

5. *Fonctions vectorielles d'une variable réelle.*
6. *Applications à valeurs réelles.*
7. *Logarithme complexe.*
8. *Fonctions circulaires directes et réciproques d'une variable complexe.*
9. *Fonctions périodiques.*
10. *Fonctions homogènes.*
11. *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.*
12. *Développements limités.*
13. *Homéomorphismes.*
14. *Limites.*
15. *Limite supérieure et limite inférieure.*
16. *Espaces métriques.*
17. *Espaces vectoriels normés.*
18. *Continuité uniforme.*
19. *Convergence uniforme.*
20. *Espaces compacts.*
21. *Convexité.*
22. *Problèmes d'interversion des limites.*
23. *Produits d'espaces topologiques.*
24. *Prolongement des fonctions.*
25. *Utilisation des suites en topologie.*
26. *Suites dans un espace métrique.*
27. *Complété d'un espace métrique.*
28. *Points d'accumulation.*
29. *Séries numériques.*
30. *Opérations sur les séries.*
31. *Séries entières.*
32. *Opérations sur les séries entières.*
33. *Fonctions définies par des suites ou des séries.*
34. *Fonctions définies par une intégrale (l'intervalle d'intégration étant compact ou non).*
35. *Calcul approché de la somme d'une série.*
36. *Calcul approché d'une intégrale.*
37. *Calcul des primitives.*
38. *Intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.*
39. *Primitives et intégrales.*
40. *Formes différentielles de degré un.*
41. *Série de Taylor.*
42. *Dérivées d'ordre supérieur.*
43. *Dérivées partielles.*
44. *Fonctions implicites. Applications à la géométrie.*
45. *Problèmes d'extremum.*
46. *Changement de variables dans une équation différentielle.*
47. *Equation différentielle linéaire :* $A(x)\,y' + B(x)\,y = C(x)$.
48. *Equations différentielles linéaires d'ordre* n.
49. *Notion de courbe paramétrée.*

50. Propriétés affines des courbes planes.

51. Propriétés métriques des courbes planes.

52. Propriétés affines des courbes gauches.

53. Propriétés métriques des courbes gauches.

54. Courbure et torsion.

55. Trièdre de Frenet.

56. Plan tangent à une surface.

57. Hélice circulaire. Mouvement hélicoïdal.

58. Vitesse.

59. Mouvements à accélération centrale.

60. Mouvement d'un plan sur un plan.

61. Repère mobile.