EPREUVES ORALES

AGREGATION HOMMES

EPREUVE D'ANALYSE - TRIGONOMETRIE - MECANIQUE

Trop de candidats ont cette année encore, et malgré des avertissements répétés, donné l'impression que pour eux l'emploi d'un certain vocabulaire considéré comme «noble», espaces de Banach, filtres, tribus, morphisme, etc... les dispensait de montrer qu'ils possédaient de solides connaissances sur les mathématiques figurant au programme et que l'on est en droit d'exiger d'un futur agrégé. Certes ils ont toujours la possibilité de placer leur leçon au niveau de leur choix, mais il est indispensable que ce choix corresponde au niveau réel de leur savoir et non à l'utilisation d'un vocabulaire ne recouvrant souvent que le néant. Si en particulier un candidat introduit dans son plan les espaces de Banach de dimension quelconque, le jury est en droit d'exiger qu'il donne des exemples et des applications correspondant à ce niveau de généralité.

L'aspect purement formel des connaissances acquises par de trop nombreux candidats est aussi illustré par des leçons où ne figurent ni exemples, ni applications éclairant les divers aspects du sujet traité. Le jury se trouve alors dans l'obligation de proposer ses propres exemples, qui sont rarement étudiés avec l'aisance souhaitable. Un candidat a donc intérêt à préparer de lui-même suffisamment d'applications significatives pour se mettre à l'abri de mauvaises surprises. Constatons à ce propos que les exposés sur le calcul numérique – qui d'ailleurs ne semblent pas avoir bonne réputation – ont conduit à des catastrophes ceux qui n'avaient réfléchi à aucun exemple, mais que par contre une des meilleures notes a été accordée sur le sujet «calcul approché des intégrales» à une étude précise et comparée de divers procédés de calcul qui ne cherchait nullement à être un catalogue plus ou moins exhaustif et superficiel des méthodes en usage aujourd'hui.

A l'opposé, il paraît nécessaire de signaler que de nombreux candidats ignorent le minimum de formalisme nécessaire à une compréhension claire des théorèmes les plus élémentaires. Ainsi ignore-t-on que la composition des fonctions permet de ne pas traiter en deux paragraphes distincts des expressions du type $\int_a^x$ et $\int_{a(x)}^{b(x)}$, que $f + g$, fg sont des fonctions pouvant s'écrire comme fonctions composées... Trop de candidats donnent l'impression d'avoir des connaissances «discrètes» en se montrant incapables de trouver le moindre lien entre les divers chapitres de l'analyse : la connexité est par exemple une notion qui ne s'introduit que dans la leçon portant ce nom et n'est d'aucun usage dans les autres.

Enfin le jury rappelle que, si les candidats sont tenus à préparer en détail, en vue de leur exposé, les démonstrations d'au moins deux des théorèmes ou exemples importants cités dans leur plan, ils doivent être capables d'analyser et de discuter les autres. Il rappelle aussi que lors d'une épreuve orale un candidat doit surveiller sa tenue, articuler le mieux possible, écrire lisiblement et sans fautes grossières d'orthographe, enfin permettre aux auditeurs de lire ce qu'il écrit et d'entendre ce qu'il dit. Beaucoup de candidats laissent supposer qu'ils tiennent un morceau de craie pour la première fois de leur vie : la suppression fréquente des oraux dans les universités ne tend-elle pas à accréditer que cette hypothèse est une réalité !

QUELQUES REMARQUES TECHNIQUES

Leçons sur les courbes et les surfaces

La plupart des candidats semblent avoir une notion très confuse de ce que l'on peut raisonnablement appeler une courbe ou une surface. Peut-être pourrait-on définir une courbe comme l'image d'une immersion d'un intervalle de $\mathbb{R}$ ou comme sous-variété de dimension 1, une surface comme une sous-variété de dimension 2 dans un espace de dimension 3. En fait, les candidats confondent presque tous une courbe et la manière dont un mobile est susceptible de la parcourir. La notion de tangente à une courbe devient alors très obscure, d'autant plus que la façon dont on peut définir correctement la limite d'une droite dépendant d'un paramètre (ou d'un point) est ignorée.

Une erreur fréquemment constatée est de s'imaginer que dans le cas hyperbolique ($rt - s^2 < o$) le plan tangent coupe la surface selon deux droites.

Il paraît utile de faire remarquer que, dans les leçons du type «courbes en coordonnées polaires» ou «courbes définies paramétriquement» le candidat n'a pas à faire une théorie générale des courbes, mais à expliquer sur des exemples un certain nombre de phénomènes susceptibles de se produire et à construire effectivement avec le maximum de soin, selon les conventions habituelles, des courbes sur le tableau noir.

Leçons dites élémentaires sur la théorie des fonctions

- calcul des primitives ;
- étude à partir d'exemples d'équations différentielles homogènes ;
- étude à partir d'exemples d'équations différentielles de Lagrange et de Clairaut.

Leur but est d'illustrer sur des exemples quelques théorèmes généraux, en montrant les limites de leur application. Il est donc d'autant plus important d'exiger un maximum de rigueur dans les démonstrations. Malheureusement le candidat se croit en général autorisé à adopter l'attitude inverse : les fonctions n'ont plus ni source, ni but, elles sont rarement continues et le problème de leur existence n'est jamais posé. Il s'ajoute à cela une confusion presque systématique entre une solution de l'équation différentielle, qui est une fonction d'une variable définie dans un intervalle de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$, une représentation paramétrique (application d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$) d'une courbe intégrale et une courbe intégrale (sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ ayant certaines propriétés).

Comme dans toutes les leçons d'exemples, le candidat peut profiter de la grande latitude qui lui est offerte pour isoler les difficultés et restreindre son étude à un nombre limité de phénomènes intéressants qui peuvent apparaître

Intégration

Disons tout d'abord que, si le jury est loin d'être hostile aux mesures positives définies sur une tribu, il souhaiterait néanmoins que, à l'issue d'un plan ayant tourné pour l'essentiel autour de ces questions, le candidat soit capable de dire avec précision ce qu'est une fonction Lebesgue - mesurable ou Lebesgue - intégrable sur $\mathbb{R}$.

La leçon intitulée «intégrale des fonctions continues sur un segment de $\mathbb{R}$; extention à d'autres classes de fonctions» peut donner lieu à une introduction claire et rapide du symbole $\int_a^b f(x)\,dx$, lorsque f est continue sur $[a, b]$, en considérant les sommes $\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a + k\,\frac{b-a}{n})$.

Le candidat a alors le choix entre les extensions suivantes :

- Intégrales impropres des fonctions continues sur un intervalle ouvert.

- Fonctions Riemann-intégrables. Signalons à ce propos que certains plans définissent tout d'abord l'intégrale d'une fonction continue en considérant les sommes de Darbóux, affirment ensuite qu'une telle fonction est Riemann-intégrable,... puis introduisent les fonctions Riemann-intégrables ; cette façon de procéder a paru peu claire au jury.

- Introduction de l'Intégrale de Lebesgue en considérant des suites croissantes de fonctions continues presque partout convergentes (la notion d'ensembles de mesure nulle pouvant être introduite élémentairement). On passe ainsi directement de la théorie de l'intégrale des fonctions continue à celle de Lebesgue en court-circuitant l'intégrale de Riemann.

Cette liste n'est évidemment pas limitative ; on pourrait aussi envisager l'intégrale de Stieltjes, etc.

Topologie de $\mathbb{C}$

Aucun candidat n'a montré que $\mathbb{C}$ n'est pas homéomorphe à $\mathbb{R}$, que $\mathbb{C}$ n'est pas un corps ordonnable. La leçon «topologie de $\mathbb{C}$» doit aussi être considérée comme portant sur un sujet plus précis que «topologie de $\mathbb{R}^2$».

Espaces normés

Le jury regrette que la question «à quoi sert la théorie des espaces normés ?» plonge les candidats dans des abîmes de perplexité. Ceux d'entre eux qui se limitent à un niveau élémentaire devraient néanmoins être capables de donner des exemples d'application à la résolution de problèmes d'analyse classique, utilisant les notions de parties totales et de suites uniformément bornées de formes linéaires. Quant à ceux qui citent les théorèmes de Banach, Banach-Steinhauss, etc. il serait bon qu'ils connaissent des applications désormais classiques de ces résultats (par exemple à la théorie des séries trigonométriques). Pour les leçons portant sur les espaces normés de dimension finie, supposer déjà connue la topologie de $\mathbb{R}^n$ est maladroit. Des considérations géométriques sont indispensables si l'on veut exploiter convenablement la notion de norme, mieux adaptée à la structure vectorielle que celle de distance. Malheureusement le lien entre parties ouvertes convexes symétriques bornées et normes est souvent ignoré, de même que les propriétés des ensembles convexes. Toutefois un candidat a su habilement montrer en dimension finie, qu'une partie convexe fermée est l'intersection des demi-espaces fermés qui la contiennent en introduisant une norme euclidienne. On aimerait aussi que les candidats insistent sur des propriétés propres au cas de la dimension finie ; rapports entre ouverts et pavés, expression d'un ouvert comme réunion d'une suite croissante de parties compactes, etc.

Extremum et fonctions convexes

Dans les deux cas les candidats négligent d'indiquer les résultats plus particuliers obtenus pour les fonctions d'une variable réelle. Ainsi le fait que les fonctions convexes sont des intégrales définies de fonctions croissantes semble être ignoré. L'utilisation des fonctions convexes pour résoudre des problèmes d'extremum est rarement citée. Enfin le jury tient à signaler que trois candidats ont utilisé pour les formes quadratiques positives définies sur un espace de Banach quelconque une notion de «non dégénérescence» topologique, sans se rendre compte qu'en dimension infinie elle diffère de la notion algébrique classique. Aucun candidat non plus n'a évidemment noté que l'existence d'une telle forme quadratique impliquait que l'espace était «hilbertisable».

Différentielles

Dans trop de cas une analogie formelle avec le cas d'une variable conduit les candidats à commettre de graves confusions ; ainsi les liens entre la $\mathbb{C}$ - dérivation et la $\mathbb{R}^2$-dérivation ne sont pas suffisamment dégagés. Les candidats auraient intérêt à se restreindre aux fonctions continûment différentiables sur un ouvert, dès qu'il ne s'agit plus de fonctions d'une variable réelle ; cela leur éviterait de s'aventurer sur un terrain hérissé de contre-exemples pathologiques, que la plupart ignore d'ailleurs. En ce qui concerne les différentielles d'ordre supérieur à 1, affirmer que ce sont des formes multilinéaires symétriques ne dispense pas de préciser soigneusement, en dimension finie, leur expression en fonction des dérivées partielles. A ce propos, et spécialement lorsqu'il s'agit de la formule de Taylor, on peut regretter que l'usage des multi-indices soit ignoré. Toujours à propos de la formule de Taylor, sa version avec reste intégral est souvent oubliée et la différence vis-à-vis du calcul numérique entre la formule de Taylor-Young et la formule de Taylor avec reste de Lagrange n'est pas perçue.

Equations différentielles linéaires à coefficients constants

Trop de candidats s'appuient sur les théorèmes généraux d'existence et d'unicité de solutions d'équations différentielles pour résoudre le cas particulier des équations différentielles linéaires à coefficients constants, qui sont susceptibles d'être traitées par voie purement algébrique. La recherche pratique des solutions est toujours négligée :

- dans le cas où l'on veut des solutions réelles, il est nécessaire de reconnaître dans l'ensemble des solutions, trouvées à valeurs dans $\mathbb{C}$, celles qui sont effectivement à valeurs réelles ;

- dans le cas d'une équation avec un second membre de la forme exponentielle polynôme il est utile de savoir les formes bien connues d'une solution particulière sans avoir recours à la méthode dite de «variation de la constante».

Séries de fonctions, séries entières

La plupart des candidats ne peuvent présenter d'autre exemple de série de fonctions que les séries entières. Certains, qui ne traitent la question que dans les Banach, ne connaissent même pas la notion de convergence en moyenne. La notion de convergence uniforme sur une famille de parties de l'ensemble de définition des fonctions est ignorée au point que certains candidats essayent de montrer la convergence uniforme des séries entières sur tout le disque de convergence. On confond d'ailleurs trop souvent la recherche du disque de convergence et celle du domaine de convergence ; le disque de convergence d'une série entière est un domaine dans lequel existe un prolongement analytique de la fonction représentée par la série. La notion d'analycité n'est d'ailleurs jamais clairement dégagée, ce qui conduit à des confusions graves entre fonctions C^{∞}, dont la série de Taylor converge, et fonctions analytiques.

Limites

Il en est des filtres comme des espaces de Banach ; leur définition n'est illustrée d'aucun exemple montrant que leur introduction peut s'avérer réellement utile (produit d'espaces compacts par exemple). Le seul exemple qu'on puisse obtenir est celui du filtre de Fréchet ; encore qu'il arrive que des candidats ne sachent pas le comparer à un filtre dont on connaît explicitement une base.

En ce qui concerne les sommes de Darboux, certains candidats parlent de leur limite sans se préoccuper de donner un sens précis à ce terme.

Dans le cas de IR, il est impossible d'obtenir sur les limites supérieures et inférieures plus que leur définition ; on ne peut savoir si ce sont des valeurs d'adhérence de la suite.

Le fait que Q est dense dans IR ne conduit pas à fournir des exemples de représentations des nombres réels par des suites de nombres rationnels, alors que la numération et les fractions continues sont explicitement au programme.

Enfin la «vitesse de convergence» d'une suite vers sa limite est ignorée, ce qui est particulièrement grave pour ceux qui ont à traiter du calcul numérique.

EXPOSES D'ANALYSE

1. *Espaces métriques compacts ; applications.*
2. *Espaces métriques complets ; théorème du point fixe.*
3. *Espaces métriques compacts ; espaces métriques complets.*
4. *Produit de deux espaces topologiques. Applications.*
5. *Espaces vectoriels normés.*
6. *Espaces normés de dimension finie.*
7. *Définition et propriétés de l'ensemble* $\underline{R}$ *des nombres réels.*
8. *Approximation d'un nombre réel par des rationnels.*
9. *Topologie de* $\underline{R}^n$.
10. *Espaces connexes. Parties connexes de* $\underline{R}$. *Applications.*
11. *Topologie de* $\underline{C}$. *Applications (par exemple : le théorème de d'Alembert-Gauss).*
12. *Suites numériques. Limites, limite supérieure, limite inférieure.*
13. *Suites définies par une relation de récurrence.*
14. *Limites.*
15. *Fonctions continues.*
16. *Fonctions croissantes.*
17. *Fonctions inverses (ou réciproques) ; fonctions implicites.*
18. *Fonctions implicites ; applications géométriques.*
19. *Fonctions convexes d'une ou plusieurs variables ; inégalités de convexité.*
20. *Les différentes notions de convergence.*
21. *Exemples d'utilisation du critère de convergence de Cauchy (suites, séries, fonctions, intégrales).*
22. *Dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables ; changement de variables ; exemples.*
23. *Fonctions de plusieurs variables : formule des accroissements finis et formule de Taylor ; applications.*
24. *Applications continûment différentiables d'un ouvert de* $\underline{R}^n$ *dans* $\underline{R}^p$.
25. *Les différentes formules de Taylor.*
26. *Applications des formules des accroissements finis et de Taylor aux problèmes de calcul numérique.*
27. *Extremum.*

28. *Comparaison de fonctions au voisinage d'un point.*
29. *Applications de la méthode des développements limités ou asymptotiques.*
30. *Recherche pratique des limites : analyse des différentes méthodes permettant de montrer qu'une fonction a une limite.*
31. *Fonction logarithme, fonction exponentielle d'une variable réelle.*
32. *Fonction e^z pour z complexe.*
33. *Extensions de la notion de fonction exponentielle.*
34. *Fonctions circulaires directes et inverses.*
35. *Méthodes permettant d'étendre le domaine de définition d'une fonction ; prolongement des identités fonctionnelles ; exemples.*
36. *Théorie de l'intégrale.*
37. *Intégration des fonctions continues sur un segment de $\underline{R}$. Extension de la notion d'intégrale à d'autres classes de fonctions.*
38. *Méthodes pratiques de recherche des primitives et de calcul des intégrales.*
39. *Intégrales impropres ; exemples.*
40. *Fonctions définies par une intégrale.*
41. *Intégrale curviligne.*
42. *Calcul approché d'une intégrale.*
43. *Séries à termes réels ou complexes.*
44. *Liaison entre la théorie de l'intégrale et la théorie des séries numériques.*
45. *Suites et séries de fonctions.*
46. *Séries entières.*
47. *Opérations sur les séries numériques.*
48. *Opérations sur les séries de fonctions ; exemples.*
49. *Méthodes de développement en série entière.*
50. *Série de Taylor d'une fonction.*
51. *Les problèmes d'interversion de limites en analyse ; application aux séries et aux intégrales.*
52. *Equations différentielles linéaires.*
53. *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*
54. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles de Lagrange et de Clairaut.*
55. *Etude, à partir d'exemples, des équations différentielles homogènes.*
56. *Equation différentielle linéaire $y' + A(x)y = B(x)$, dans laquelle A et B sont développables en série entière au voisinage de zéro.*
57. *Exemples de problèmes géométriques résolus à l'aide d'équations différentielles.*
58. *Courbe ; droite tangente.*
59. *Surface ; plan tangent.*
60. *Etude locale des courbes : propriétés affines.*
61. *Etude locale des courbes : propriétés métriques.*
62. *Tracé des courbes planes définies par $\vec{OM} = \vec{f}(t)$. Exemples.*
63. *Tracé des courbes planes définies en coordonnées polaires par $\rho = f(\theta)$; exemples.*
64. *Application de la théorie des développements limités ou asymptotiques au tracé des courbes planes.*
65. *Courbure et centre de courbure pour une courbe plane.*
66. *Mouvements à accélération centrale.*
67. *Mouvement relatif, changement de repère, applications.*
68. *Cinématique du solide.*

69. *Mouvement d'un repère orthonormé ; application à la théorie métrique des courbes gauches et à la cinématique du solide.*

70. *Mouvement d'un plan sur un plan.*

EPREUVE D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

Le jury se doit de rappeler à nouveau qu'une épreuve orale ne peut s'improviser en trois heures : l'absence d'une préparation appliquée et sérieuse est flagrante chez de nombreux admissibles - et parmi les meilleurs -. Les candidats doivent se persuader qu'une année consacrée à la préparation du concours n'est pas trop longue pour la tâche à accomplir : se cultiver, réfléchir sur le programme et l'approfondir, apprendre à mettre en forme un exposé. Comme chaque année, le jury ne peut que déplorer :

- le trop grand nombre de leçons insuffisamment fouillées et dominées,
- la pauvreté de plans constitués par une suite de définitions,
- la rareté et la banalité des exemples et applications,
- l'abus des répétitions de trivialités,
- et aussi la désaffection pour la géométrie.

Cette désaffection constitue d'ailleurs un risque certain, car des couplages de deux sujets de géométrie, empruntés à des chapitres différents du programme,ont été donnés.

La première partie de l'épreuve (vingt minutes au maximum) est consacrée au plan. Celui-ci ne doit pas être un simple compte rendu de lecture, ni la recopie d'un livre, aussi bien fait soit-il ; il s'agit d'établir une synthèse,qui ne soit pas une compilation et la personnalité du candidat doit se manifester dans le choix, l'ordre et la présentation des questions traitées.

Une grande liberté est laissée au candidat pour la détermination du niveau de son travail. Qu'il n'oublie pas cependant qu'un minimum est fixé par le programme de l'oral et par les instructions : il y est précisé que le candidat doit dominer le programme des classes du second degré et des classes préparatoires et que le jury peut interroger sur toutes les questions inscrites au programme en rapport avec le sujet traité. Certaines leçons, restées à peine au niveau d'une classe terminale des lycées,ont été dans ces conditions jugées insuffisantes, surtout si les interrogations du jury sont restées sans réponse.

Tout candidat doit avoir le souci de donner des motivations non triviales et surtout des illustrations. Même si le texte ne le précise pas, il doit proposer des exemples et des applications en les cherchant dans toutes les parties du programme, quitte bien entendu à ne pas les préparer en détail en vue d'un exposé complet. Mais le candidat doit être capable de répondre à cette question que trop souvent le jury a été amené à poser : où utilise-t-on les notions que vous venez d'introduire ? (exemples : signature d'une permutation, sous-espaces propres ou stables, décomposition en éléments simples, division suivant les puissances croissantes, dualité en algèbre, formes bilinéaires...).

Pour les théorèmes importants, il faut donner un énoncé complet et précis et on peut, en quelques mots, indiquer au cours du plan l'idée de la démonstration. Ces théorèmes doivent être bien circonscrits, des exemples ou contre-exemples montrant le rôle des hypothèses ; il n'est pas raisonnable de supposer par exemple qu'un corps est commutatif ou de caractéristique différente de 2 sans savoir où intervient cette hypothèse. D'autre part se contenter d'un simple théorème d'existence est souvent insuffisant ; il est indispensable de connaître, lorsqu'ils existent,les algorithmes permettant de construire la solution et d'être capable, si le jury le propose, d'aller jusqu'à une application numérique (exemples : changement de base, trigonalisation d'une matrice, identité de Bezout pour deux polynômes avec condition sur les degrés...).

A la fin du plan le candidat est tenu d'indiquer un choix de points intéressants ou importants, démonstrations ou applications, qu'il a spécialement préparés en vue de l'exposé. Il convient de citer au moins deux points qui comportent des raisonnements significatifs ne se réduisant pas à des trivialités : que dire d'un candidat qui, dans une leçon sur les applications d'un ensemble dans un ensemble offre pour l'exposé le seul théorème : si f est bijective, il existe une application réciproque ?

Quelques conseils pratiques :

- les rappels sont nécessaires ; ils ne doivent pas être abusifs (un candidat leur a consacré dix-huit minutes) ;
- pour faciliter la discussion du plan, le tableau doit porter trace de tous les points abordés, sans aller évidemment jusqu'à l'écriture de phrases entières et même de tout le plan ;
- ne pas craindre en géométrie de faire des figures soignées et claires, et d'utiliser le langage des groupes opérant sur un ensemble.

REMARQUES PARTICULIERES A PROPOS DE LEÇONS DIVERSES

Analyse combinatoire. Le candidat doit connaître les combinaisons avec répétition, être capable de développer $(x_1 + \dots x_k)^n$, de trouver la dimension de l'espace des polynômes à plusieurs indéterminées de degré inférieur ou égal à p, de donner des exemples non triviaux de problèmes de dénombrement. Une application, tout indiquée, aux probabilités doit être présentée de façon correcte et non de manière floue et imprécise.

Groupe symétrique. La décomposition d'une permutation en produit de cycles est explicitement au programme.

Anneaux. Il faut indiquer d'autres exemples d'anneaux principaux que $\mathbb{Z}$.

Nombres complexes. Il est bon de connaître plus d'une construction de $\mathbb{C}$, et indispensable de montrer que le problème du prolongement, que l'on pose, a une solution unique à un isomorphisme près ; ne pas oublier de parler des nombres complexes conjugués, de vérifier que le module est une norme.

Fonctions rationnelles à une indéterminée. La leçon doit comprendre la pratique de la décomposition sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ avec le cas des pôles multiples.

Polynômes à plusieurs indéterminées. La construction manque souvent de clarté, et indique seulement une construction par récurrence dans laquelle les indéterminées ont des rôles dissymétriques ; les dérivées partielles, l'interversion des dérivations, la formule de Taylor, les polynômes homogènes, l'opération de substitution sont des sujets peu abordés et utilisés.

Polynômes symétriques. L'opération de symétrisation est ignorée.

Divisions dans $K[X]$. La division suivant les puissances croissantes est présentée de façon lourde sans aucune application.

Sous-espaces vectoriels. Les candidats oublient le plus souvent de parler d'espace-quotient, ainsi que de l'isomorphisme canonique des supplémentaires du sous-espace E_1 avec E/E_1, et de l'isomorphisme de deux supplémentaires de E_1 par la projection parallèle à E_1.

Opérations sur les matrices. Des définitions non intrinsèques sont souvent données pour les opérations.

Dualité. Les leçons sur ce sujet manquent d'applications (exemples : conjugaison dans la théorie des coniques, intersection d'hyperplans indépendants, isomorphisme canonique entre $\mathscr{L}(E, E; K)$ et $\mathscr{L}(E ; E^*)$...)

Formes quadratiques. Rappelons que les formes quadratiques peuvent être définies directement par les deux propriétés :

a) $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$

b) l'application $(x, y) \longmapsto q(x+y) - q(x) - q(y)$ est bilinéaire

Ne pas oublier d'étudier le rapport entre rang et noyau, ainsi que la restriction à un sous-espace.

Complexifié d'un espace vectoriel réel. Les candidats n'étudient pas les complexifiés des sous-espaces et ignorent qu'un espace vectoriel complexe donné n'est pas canoniquement le complexifié d'un espace vectoriel réel.

Une application intéressante de cette leçon est que tout endomorphisme d'un espace vectoriel réel de dimension finie admet un sous-espace stable de dimension 1 ou 2, ce qui établit un lien avec les deux autres leçons sur les sous-espaces stables et sur le groupe orthogonal réel.

Sous-espaces propres, sous-espaces stables. La partie « sous-espaces stables » est en général très pauvre ; on peut noter que la recherche des vecteurs propres du transposé d'un endomorphisme u revient à celle des hyperplans stables par u.

Groupe orthogonal réel. La décomposition d'une matrice orthogonale en blocs diagonaux de dimension 1 ou 2 est au programme.

Barycentre. La définition et l'usage des coordonnées barycentriques sont à connaître, ainsi que les applications euclidiennes (exemple : formule de Leibniz).

Inversion dans le plan. Les candidats ne savent pas établir rapidement et correctement les théorèmes sur l'inverse d'une droite ou d'un cercle ; ils ne voient pas le lien entre l'inversion et le groupe circulaire du plan.

Répartition des notes

308 candidats sur 314 admissibles ont participé à l'épreuve orale d'algèbre et géométrie. Les notes sont ainsi réparties :

$0 \leqslant n \leqslant 9$	$10 \leqslant n \leqslant 19$	$20 \leqslant n \leqslant 29$	$30 \leqslant n \leqslant 39$	$40 \leqslant n \leqslant 49$	$50 \leqslant n \leqslant 59$	$60 \leqslant n \leqslant 69$	$70 \leqslant n \leqslant 80$
31	46	47	52	46	43	28	15

EXPOSES D'ALGEBRE ET GEOMETRIE

1. *Analyse combinatoire. Applications.*
2. *Relations d'ordre. Exemples et applications.*
3. *Applications d'un ensemble dans un ensemble. Exemples.*
4. *Groupe symétrique.*
5. *Exemples de groupes.*
6. *Sous-groupes. Groupe quotient. Exemples et applications.*
7. *Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.*
8. *Idéaux d'un anneau. Exemples et applications.*
9. *Anneaux commutatifs intègres. Corps des fractions.*
10. *Corps. Exemples.*
11. *Algèbre sur un anneau commutatif. Exemples.*
12. *Corps des nombres complexes.*
13. *Divisibilité dans un anneau intègre. Exemples.*
14. *Anneaux principaux. Exemples.*
15. *Nombres premiers.*
16. *Anneau des classes résiduelles modulo n.*
17. *Numération. Notion de base. Anneau des nombres décimaux.*
18. *Polynômes à une indéterminée.*
19. *Polynômes à plusieurs indéterminées. Dérivation. Applications.*
20. *Fonctions polynômes.*
21. *Racines d'un polynôme. Multiplicité. Exemples.*
22. *Polynômes symétriques.*
23. *Divisions dans une algèbre de polynômes sur un corps commutatif. Applications.*
24. *Fractions rationnelles à une indéterminée sur un corps commutatif.*
25. *Sous-espaces d'un espace vectoriel. Somme et intersection de sous-espaces. Somme directe. Exemples et applications.*

26. *Dimension et rang en algèbre linéaire.*
27. *Dualité en algèbre linéaire. Applications.*
28. *Opérations sur les matrices, matrices équivalentes, matrices semblables.*
29. *Exponentiation d'une matrice.*
30. *Déterminant d'un endomorphisme et déterminant d'une matrice carrée. Propriétés.*
31. *Applications multilinéaires. Formes multilinéaires alternées. Exemples.*
32. *Systèmes d'équations linéaires.*
33. *Complexification d'un espace vectoriel réel et d'une application linéaire. Applications.*
34. *Sous-espaces vectoriels propres, sous-espaces vectoriels stables d'un endomorphisme. Applications.*
35. *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*
36. *Trigonalisation, diagonalisation d'une matrice. Applications.*
37. *Formes bilinéaires. Rang. Matrice. Changement de bases. Applications.*
38. *Formes quadratiques. Conjugaison. Noyau. Restriction à un sous-espace.*
39. *Décomposition d'une forme quadratique en carrés. Cas réel.*
40. *Groupe orthogonal réel. Matrices orthogonales. Réduction.*
41. *Groupe unitaire. Matrices unitaires. Réduction.*
42. *Dualité dans les espaces euclidiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes symétriques. Réduction.*
43. *Dualité dans les espaces hermitiens. Adjoint d'un endomorphisme. Endomorphismes auto-adjoints. Réduction.*
44. *Espace euclidien orienté de dimension 3. Produit mixte, produit vectoriel. Applications.*
45. *Espaces affines. Applications affines. Sous-espaces. Affines. Repère affine.*
46. *Barycentre. Applications.*
47. *Convexité dans les espaces affines réels. Applications.*
48. *Espaces projectifs. Sous-espaces projectifs. Intersection. Repère projectif.*
49. *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective. Eléments à l'infini.*
50. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension n. Déplacements et antidéplacements.*
51. *Projection orthogonale dans un espace affine euclidien. Problèmes d'angles et de distances.*
52. *Groupe des rotations du plan euclidien. Angle de deux vecteurs non nuls. Angle de deux droites.*
53. *Similitudes directes et indirectes dans le plan. Formes réduites. Groupe des similitudes.*
54. *Exemples de groupes d'isométries laissant globalement stable une partie de l'espace affine euclidien de dimension 2 ou 3.*
55. *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension 2 et 3. Formes réduites.*
56. *Inversion dans le plan. Applications.*
57. *Inversion dans le plan. Groupe circulaire du plan.*
58. *La sphère.*
59. *Torseurs.*
60. *Droite projective. Homographie. Involution .*
61. *Rang d'une quadrique. Eléments conjugués. Applications.*
62. *Equation tangentielle d'une conique non dégénérée. Enveloppes de seconde classe.*
63. *Exemples de faisceaux linéaires de coniques. Théorème de Desargues. Applications.*
64. *Complété projectif du complexifié d'un plan affine euclidien. Points cycliques. Applications.*
65. *Propriétés projectives des coniques non dégénérées.*
66. *Propriétés métriques des coniques non dégénérées.*
67. *Représentations rationnelles propres des coniques non dégénérées. Applications.*
68. *Coniques dans le plan affine réel : diamètres, propriétés des diamètres. Equations réduites. Cas euclidien : directions principales, axes de symétrie. Applications.*

AGREGATION FEMMES
RAPPORT SUR LES EPREUVES DEFINITIVES (ORAL)

REMARQUES GENERALES

Lors de l'épreuve d'analyse, comme lors de l'épreuve d'algèbre, trop de candidates ont donné l'impression de ne pas savoir faire un bon usage des livres mis à leur disposition ; elles semblent s'être précipitées sur eux, y avoir relevé rapidement un plan, y avoir recopié plus hâtivement encore quelques démonstrations ; ceci pour lire finalement le tout au jury. Or les sujets demandés sont des sujets de synthèse pour lesquels une certaine réflexion, sans documents, est féconde ; bien entendu il est nécessaire, pour faire un exposé cohérent, d'avoir, pendant l'année, étudié et réfléchi sur le programme ; on ne peut, en trois heures reconstituer tout.

Le jury rappelle avec insistance que la candidate doit «indiquer au jury un choix de points qu'elle juge importants dans son étude». Cette indication ne peut évidemment se limiter à une seule question (le jury ne pourrait alors exercer le choix qu'il a le devoir d'exercer) ; on n'y peut faire valablement figurer un lemme non essentiel ou un exercice sans intérêt.

Quelques questions d'algèbre ont été d'une pauvreté affligeante, sans exemples, et avec encore moins d'applications : une candidate ne connaissait comme anneaux que $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$; une autre après un exposé convenable sur les formes quadratiques a été hors d'état de décomposer en carrés $xy+yz+zx$; une autre encore, après en avoir présenté correctement la théorie, n'a pas su pratiquement commencer la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples ; ni une autre enfin, appliquer une présentation correcte du théorème fondamental sur les polynomes symétriques à une transformation de

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^3 .$$

La liberté qu'ont actuellement les Universités de fixer elles-mêmes pour la maîtrise le choix des unités de valeur qui la composent est peut-être une des raisons pour lesquelles certaines candidates ont montré de graves lacunes en analyse. Mais la préparation à l'agrégation aurait dû être, pour elles, l'occasion de compléter leurs connaissances insuffisantes ; comme elle doit être, pour les candidates qui avaient déjà fait sérieusement de l'analyse, l'occasion d'un travail de synthèse et de retours en arrière qui, à de futurs professeurs et de futurs chercheurs, sont indispensables.

Les remarques, critiques en général, qui suivent concernent des exposés précis, les premiers d'algèbre, les autres d'analyse. Mais il convient de dire que le jury a eu la satisfaction d'en entendre aussi de bons, de très bons et même d'excellents et qu'il cherche moins une érudition, qui n'est pas normalement de l'âge des candidates et qui, au fond, importe peu, que les qualités d'esprit et la sûreté indispensables à leur futur métier. Sous ce rapport et tout en espérant des progrès nouveaux, il pense que les agrégées du concours de 1972 sauront, comme celles des années précédentes, faire face aux tâches importantes qui leur seront confiées.

REMARQUES PARTICULIERES AUX EXPOSES D'ALGEBRE

Analyse combinatoire. Cette question a eu peu de succès ; elle a été, en général, mal traitée.

Numération. Cette question n'a été choisie qu'une seule fois.

Groupe symétrique. Question souvent prise - sous des titres divers - ; l'étude de la signature reste une épreuve délicate.

Corps des complexes. Question peu choisie. Elle a pourtant donné lieu à un très bon exposé.

Résultant de deux polynômes. Certaines candidates arrivent à en parler, sans jamais le définir d'une manière précise. Toutefois une excellente note a été attribuée à une candidate sur ce sujet.

Espaces vectoriels. Il est singulier que les candidates soient embarrassées par la question des sous-espaces d'un espace de dimension finie.

Système d'équations linéaires. Beaucoup de candidates n'ont pas pu introduire correctement les «déterminants caractéristiques».

Espaces hermitiens. Il y a eu de bons exposés sur ce sujet. Mais d'autres candidates n'arrivent pas à donner les justifications indispensables lors de la définition de l'adjoint d'un endomorphisme.

Polynôme minimal. Il y a eu de bons exposés ; mais quelques candidates ne savent pas les utiliser sur un exemple.

Géométrie. Certaines candidates avaient fait un effort particulier et la géométrie a eu plus de succès que les années précédentes. Le jury rappelle d'ailleurs que les deux sujets proposés au choix de la candidate peuvent être, tous les deux, de géométrie.

Malgré cela d'énormes lacunes subsistent : certaines candidates ne croient pas légitime de faire des «figures» qui, pourtant les aideraient considérablement. D'autres semblent plus à l'aise dans un espace de dimension n que dans un espace de dimension deux : la détermination d'une similitude plane directe par deux couples de points homologues, par exemple, semble une question insurmontable.

REMARQUES PARTICULIERES CONCERNANT LES EXPOSES D'ANALYSE

Constructions de R. Il est indispensable de montrer que les différentes constructions présentées de R définissent bien (à un isomorphisme près) le même ensemble.

Fonctions réelles (resp. ***vectorielles) d'une variable réelle.*** Le sujet est si vaste que les candidates doivent se limiter et choisir. Mais il ne faut pas se limiter à des banalités.

Applications à valeurs réelles. Il s'agit d'étudier les applications définies sur un espace topologique (sur un ouvert de R^n pour la différentiabilité) et à valeurs réelles. Leurs propriétés particulières viennent de ce qu'elles sont à valeurs dans R et non dans R^p. Se limiter aux fonctions numériques d'une variable réelle est commettre une erreur d'interprétation du texte.

Développements limités et applications. Il n'y a presque pas de chapitre d'un cours d'analyse de premier cycle qui n'utilise cette notion. Or de nombreuses candidates semblent ne connaître comme application que les formes indéterminées.

Limites. C'est le type même d'un sujet de synthèse. Il comporte normalement des indications sur des critères d'existence de limites. Une candidate qui choisit un tel sujet doit connaître des théorèmes sur l'interversion des limites.

Point d'accumulation. Il est indispensable d'en donner une définition précise.

Logarithme complexe. La partie délicate est de bien définir et utiliser à cette occasion la notion d'argument.

Fonctions homogènes. Il faut connaître des applications de cette notion ; elles sont nombreuses et importantes.

Primitives et intégrales. Il est évidemment indispensable de préciser les relations entre ces deux notions.

Equations différentielles $A(x)y' + B(x)y = C(x)$. Il faut, bien entendu, dire ce qui se passe au voisinage d'un point x_o où $A(x_o)$ est inversible. Mais une partie indispensable est l'étude des solutions au voisinage d'un point où $A(x_o)$ n'est pas inversible et l'étude des solutions maximales. Il est recommandé de se limiter à R.

Formes différentielles de degré un. Si l'on s'en tient au programme de l'oral, il convient de définir une forme différentielle de degré un, de parler de son intégration sur un arc de courbe (intégrale curviligne), de donner quelques indications sur les équations de la forme $Pdx + Qdy = 0$ et leurs courbes intégrales. Il est dangereux d'évoquer les produits extérieurs et la dérivation extérieure (qui ne figurent pas au programme de l'oral) sans avoir des connaissances précises en la matière.

Problèmes d'extremum. Il y a certainement lieu de présenter la recherche des extremums relatifs dans un ouvert ; mais le sujet est beaucoup plus général : fonctions réelles continues sur un compact, principe du module maximum pour les fonctions holomorphes, distance d'un point à un convexe fermé d'un espace de Hilbert...

Mécanique. Trop souvent les candidates ne savent pas le sens mathématique exact des mots qu'elles emploient : Il est, par exemple, question d'«angles» dépendant du temps. Pour les unes il s'agit d'une application d'une partie de R dans l'ensemble des angles de demi-droites (isomorphe à S_1) ; mais alors elles ne savent pas comment expliquer qu'une rotation de 2π radians par seconde n'est pas égale à une rotation de 0 radian par seconde. Pour d'autres il s'agit de l'application de R dans R faisant correspondre à $t \in R$, une mesure $\theta(t)$ de l'angle à l'instant t. Personne n'a pu expliquer qu'une fois le nombre réel $\theta(t_o)$ choisi pour un certain t_o, la fonction θ de R dans R est parfaitement déterminée pour des mouvements continus. La notion de relè-

vement d'une application continue de R dans S serait-elle hors de portée des candidates à l'agrégation ? La même difficulté se retrouve en géométrie différentielle où on désigne par une lettre α , l'«angle polaire» de la tangente à une courbe plane, et où l'on parle (s étant l' abscisse curviligne) de $\alpha'(s)$ et de $\frac{ds}{d\alpha}$.
Les candidates en question ne font qu'un jeu d'écriture ; elles ne savent pas bien, en général, de quoi elles parlent.

Liste des sujets d'algèbre

1. *Applications d'un ensemble fini dans lui-même.*
2. *Analyse combinatoire.*
3. *Relation d'ordre ; exemples et applications.*
4. *Relation d'équivalence compatible avec une structure algébrique.*
5. *Structures algébriques quotients.*
6. *Groupes finis ; exemples.*
7. *Systèmes de générateurs d'un groupe ; exemples.*
8. *Groupe symétrique.*
9. *Sous-groupes distingués ; exemples.*
10. *Groupe opérant sur un ensemble ; applications.*
11. *Structure d'anneau ; exemples.*
12. *Anneaux quotients de Z.*
13. *Notion d'idéal ; applications.*
14. *Divisibilité dans les anneaux intègres.*
15. *Corps : sous-corps, corps premier, caractéristique.*
16. *Corps des nombres complexes.*
17. *Numération. Nombres décimaux.*
18. *Anneau des polynômes à une indéterminée sur un corps commutatif : factorisations et applications.*
19. *Anneaux des polynômes à* p *indéterminées.*
20. *Polynômes symétriques à* p *indéterminées.*
21. *Division des polynômes suivant les puissances croissantes et applications.*
22. *Divisibilité dans les anneaux de polynômes.*
23. *Polynôme dérivé. Formule de Taylor.*
24. *Résultant de deux polynômes. Elimination.*
25. *Corps des fractions rationnelles à une indéterminée.*
26. *Fonctions polynômes associées à un polynôme à une ou plusieurs indéterminées.*
27. *Bases et dimension dans les espaces vectoriels ; applications.*
28. *Sous-espaces d'un espace vectoriel.*
29. *Applications linéaires. Espaces vectoriels quotients.*
30. *Espaces vectoriels de dimension finie : base. Rang d'une application linéaire.*
31. *Rang d'une application linéaire. Groupe linéaire.*
32. *Espace vectoriel de dimension finie : endomorphismes, automorphismes.*
33. *Dualité dans les espaces vectoriels.*
34. *Matrices et applications linéaires.*
35. *Calcul matriciel.*
36. *Formes multilinéaires ; formes multilinéaires alternées.*
37. *Déterminants.*
38. *Applications des déterminants.*

39. *Systèmes d'équations linéaires.*
40. *Valeurs propres ; vecteurs propres.*
41. *Formes réduites de la matrice d'un endomorphisme.*
42. *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*
43. *Formes quadratiques. Décomposition en carrés*
44. *Réduction d'une forme quadratique.*
45. *Espaces vectoriels euclidiens.*
46. *Groupe orthogonal en dimension finie.*
47. *Espaces vectoriels hermitiens.*
48. *Groupe unitaire en dimension finie.*
49. *Matrices unitaires, hermitiennes, symétriques réelles. Diagonalisation.*
50. *Adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien.*
51. *Espace affine de dimension finie. Groupe affine.*
52. *Barycentres, formes affines et convexité (espace affine réel).*
53. *Parties convexes d'un espace affine réel, enveloppe convexe d'une partie, faces.*
54. *Espace projectif de dimension n ; lien avec l'espace affine.*
55. *Groupe projectif dans l'espace projectif de dimension n.*
56. *Dualité dans les espaces projectifs.*
57. *Groupe projectif de la droite projective complexe.*
58. *Homographies.*
59. *Isométries dans le plan affine euclidien.*
60. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension trois.*
61. *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension n.*
62. *Isométries de R^2 euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*
63. *Isométries de R^3 euclidien laissant globalement invariante une figure donnée.*
64. *Notion d'angle.*
65. *Similitudes directes et inverses dans le plan affine euclidien.*
66. *Similitudes dans R^3 euclidien.*
67. *Inversion plane ; groupe circulaire.*
68. *Inversion dans l'espace, sphères et cercles.*
69. *Torseurs dans R^3. Equiprojectivité.*
70. *Pôles et polaires en géométrie plane.*
71. *Pôles et polaires en géométrie dans l'espace.*
72. *Quadriques dans un espace projectif de dimension n : propriétés projectives.*
73. *Propriétés projectives des coniques ; dualité.*
74. *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*
75. *Propriétés affines des coniques.*
76. *Propriétés métriques des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*
77. *Propriétés focales des coniques.*

Liste des sujets d'analyse

1. *Construction du corps des réels.*
2. *Approximation des nombres réels.*
3. *Fractions continues.*
4. *Fonctions réelles d'une variable réelle.*

5. *Fonctions vectorielles d'une variable réelle.*
6. *Applications à valeurs réelles.*
7. *Logarithme complexe.*
8. *Fonctions circulaires directes et réciproques d'une variable complexe.*
9. *Fonctions périodiques.*
10. *Fonctions homogènes.*
11. *Comparaison des fonctions au voisinage d'un point.*
12. *Développements limités.*
13. *Homéomorphismes.*
14. *Limites.*
15. *Limite supérieure et limite inférieure.*
16. *Espaces métriques.*
17. *Espaces vectoriels normés.*
18. *Continuité uniforme.*
19. *Convergence uniforme.*
20. *Espaces compacts.*
21. *Convexité.*
22. *Problèmes d'interversion des limites.*
23. *Produits d'espaces topologiques.*
24. *Prolongement des fonctions.*
25. *Utilisation des suites en topologie.*
26. *Suites dans un espace métrique.*
27. *Complété d'un espace métrique.*
28. *Points d'accumulation.*
29. *Séries numériques.*
30. *Opérations sur les séries.*
31. *Séries entières.*
32. *Opérations sur les séries entières.*
33. *Fonctions définies par des suites ou des séries.*
34. *Fonctions définies par une intégrale (l'intervalle d'intégration étant compact ou non).*
35. *Calcul approché de la somme d'une série.*
36. *Calcul approché d'une intégrale.*
37. *Calcul des primitives.*
38. *Intégration des fonctions d'une variable réelle à valeurs réelles.*
39. *Primitives et intégrales.*
40. *Formes différentielles de degré un.*
41. *Série de Taylor.*
42. *Dérivées d'ordre supérieur.*
43. *Dérivées partielles.*
44. *Fonctions implicites. Applications à la géométrie.*
45. *Problèmes d'extremum.*
46. *Changement de variables dans une équation différentielle.*
47. *Equation différentielle linéaire : $A(x)\,y' + B(x)y = C(x)$.*
48. *Equations différentielles linéaires d'ordre n.*
49. *Notion de courbe paramétrée.*

50. Propriétés affines des courbes planes.

51. Propriétés métriques des courbes planes.

52. Propriétés affines des courbes gauches.

53. Propriétés métriques des courbes gauches.

54. Courbure et torsion.

55. Trièdre de Frenet.

56. Plan tangent à une surface.

57. Hélice circulaire. Mouvement hélicoïdal.

58. Vitesse.

59. Mouvements à accélération centrale.

60. Mouvement d'un plan sur un plan.

61. Repère mobile.