PROBABILITÉS

N.B. — *Les différentes questions du problème sont largement indépendantes, à condition d'admettre à tout moment les résultats qui précèdent.*

NOTATIONS.

a. Dans tout le problème, $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ désigne un espace probabilisé, et T une application mesurable de Ω dans lui-même (c'est-à-dire telle que :

$$(\forall A \in \mathcal{A}) \qquad T^{-1}(A) \in \mathcal{A}).$$

On note E l'espérance mathématique relativement à P et, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on note 1_A la fonction indicatrice de A (c'est-à-dire l'application de Ω dans $\{0, 1\}$ définie par :

$$(\forall \omega \in A) \quad 1_A(\omega) = 1 \qquad \text{et} \qquad (\forall \omega \notin A) \quad 1_A(\omega) = 0).$$

b. La notation [ ] (resp.] [,]] et [[) est utilisée pour désigner les intervalles fermés (resp. ouverts, semi-ouverts) dans la droite achevée $\overline{\mathbf{R}}$ (munie, quand besoin est, de sa topologie usuelle d'espace compact).

La notation $<\ >$ (resp. $>\ <$, $>\ >$ et $<\ <$) est utilisée pour désigner les intervalles fermés (resp. ouverts, semi-ouverts) dans $\overline{\mathbf{N}}$ (ensemble ordonné obtenu en adjoignant à l'ensemble $\mathbf{N}$ des entiers naturels un plus grand élément noté ∞).

Pour tout x appartenant à $[0, \infty[$, on note $\mathcal{E}(x)$ la partie entière de x, et on pose $\mathcal{F}(x) = x - \mathcal{E}(x)$.

On définit par ailleurs $\mathcal{E}(\infty) = \infty$, $\mathcal{F}(\infty) = 0$.

On note I l'ensemble $[0, 1[$, $\mathcal{B}$ la tribu borélienne de I, et λ la mesure de Lebesgue sur $(I, \mathcal{B})$.

c. T^0 est l'application identique de Ω sur lui-même.

Pour tout n appartenant à $< 1, \infty <$, on définit l'application T^n de Ω dans lui-même par la relation de récurrence :

$$T^n = T^{n-1} \circ T.$$

RAPPEL.

Soit $\mathcal{C}$ un *clan* (ou algèbre de Boole) de parties de Ω (c'est-à-dire un sous-ensemble de l'ensemble des parties de Ω, fermé pour l'union des familles finies et la complémentation); supposons que $\mathcal{A}$ soit la *tribu* (ou σ-algèbre de Boole) *engendrée* par $\mathcal{C}$ (c'est-à-dire la plus petite tribu de parties de Ω qui contienne $\mathcal{C}$).

Alors P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$, et vérifie :

$$(\forall A \in \mathcal{A})\,(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists\, C \in \mathcal{C}) \quad P(\complement_A C \cup \complement_C A) < \varepsilon.$$

On dit que T *conserve la probabilité* P si et seulement si :

$$(\forall A \in \mathcal{A})\quad P[T^{-1}(A)] = P(A).$$

On dit que T est P-*mélangeante* si et seulement si elle conserve P et que, de plus,

$$(\forall A \in \mathcal{A})(\forall B \in \mathcal{A})\ \lim_{n\to\infty} P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) = P(A)\,P(B).$$

1° Soit $\mathcal{C}$ un clan de parties de Ω, qui engendre $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que, pour que T conserve P, il faut et il suffit que :

$$(\forall C \in \mathcal{C})\quad P[T^{-1}(C)] = P(C).$$

b. Démontrer que, pour que T soit P-mélangeante, il faut et il suffit qu'elle conserve P et que :

$$(\forall C \in \mathcal{C})(\forall D \in \mathcal{C})\ \lim_{n\to\infty} P(C \cap (T^n)^{-1}(D)) = P(C)\,P(D).$$

2° Dans toute cette question, on suppose que T conserve P.

a. Soit A appartenant à $\mathcal{A}$; pour tout n appartenant à $<0, \infty<$, on pose :

$$d_n = P(A \cap (T^n)^{-1}(A)) - (P(A))^2.$$

Soit $(k_n)_{n\in<0,\infty<}$ une suite strictement croissante d'éléments de $<0, \infty<$. Démontrer que, pour tout n appartenant à $<1, \infty<$,

$$E\left(\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i\in<0,n<} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}\right) - P(A)\right]^2\right)$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i\in<0,n<}\left(\frac{1}{n}\sum_{j\in<0,n<} d_{|k_i-k_j|}\right).$$

En déduire que, si T est P-mélangeante,

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in<0,n<} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}$$

tend vers P(A) en moyenne d'ordre 2, ainsi que stochastiquement (autrement dit en probabilité).

b. Réciproquement, on suppose que T vérifie la condition suivante: pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, et toute suite $(k_n)_{n\in<0,\infty<}$ strictement croissante d'éléments de $<0, \infty<$, la suite des variables aléatoires

$$\frac{1}{n}\sum_{i\in<0,n<} 1_{(T^{k_i})^{-1}(A)}$$

converge stochastiquement vers P(A).

Démontrer que, pour toute telle suite $(k_n)_{n\in<0,\infty<}$, tout couple (A,B) d'éléments de $\mathcal{A}$, et tout n appartenant à $<1, \infty<$, on a :

$$\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in <0, n<} \mathrm{P}\left((\mathrm{T}^{k_i})^{-1}(\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}\right) \right) - \mathrm{P}(\mathrm{A})\, \mathrm{P}(\mathrm{B}) \right|$$

$$\leqslant \mathrm{E}\left(\left| \left(\frac{1}{n} \sum_{i \in <0, n<} 1_{(\mathrm{T}^{k_i})^{-1}(\mathrm{A})} \right) - \mathrm{P}(\mathrm{A}) \right| \right).$$

Démontrer que, si une suite $(x_n)_{n \in <0, \infty<}$ de nombres réels ne converge pas vers 0, il existe une suite $(k_n)_{n \in <0, \infty<}$, strictement croissante, d'éléments de $< 0, \infty <$, telle que la suite

$$\left(\frac{1}{n} \sum_{i \in <0, n<} x_{k_i} \right)_{n \in <1, \infty <}$$

ne converge pas vers 0.

En déduire que T est P-mélangeante.

3° *Exemples.*

a. Soit $\Omega = < 1, n >$, $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω, et T une application bijective de Ω sur lui-même (autrement dit une substitution d'ordre n).

Quelles sont les probabilités P que T conserve?

Quelles sont celles pour lesquelles T est mélangeante?

b. On considère l'espace de probabilité $(\mathrm{I}, \mathcal{B}, \lambda)$; soit c appartenant à I, et soit T l'application de I dans lui-même définie par :

$$(\forall\, x \in \mathrm{I}) \quad \mathrm{T}(x) = \mathcal{F}(x + c)\,.$$

Est-ce que T conserve λ?

Est-ce que T est λ-mélangeante?

c. On suppose que l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ et l'application T vérifient la condition suivante : il existe une suite $(\mathrm{X}_n)_{n \in <0, \infty<}$ de variables aléatoires, indépendantes et de même loi, telle que :

— $\mathcal{A}$ est la plus petite tribu par rapport à laquelle toutes les variables aléatoires X_n sont mesurables;

— pour tout ω appartenant à Ω, et tout n appartenant à $< 0, \infty <$, on a :

$$\mathrm{X}_n[\mathrm{T}(\omega)] = \mathrm{X}_{n+1}(\omega).$$

Démontrer que T conserve P.

Démontrer que T est P-mélangeante.

II

N. B. — *Dans toute cette partie,* on suppose que T *conserve* P.

Étant donné deux événements A et B, tels que $\mathrm{P(B)} \neq 0$, on note $\mathrm{P^B(A)}$ la probabilité conditionnelle de A par rapport à B.

Étant donné une sous-tribu $\mathcal{C}$ de $\mathcal{A}$, un événement A, et une variable aléatoire P-intégrable X, on note $\mathrm{P}^{\mathcal{C}}(\mathrm{A})$ (resp. $\mathrm{E}^{\mathcal{C}}(\mathrm{X})$) la probabilité (resp. l'espérance) conditionnelle, par rapport à la sous-tribu $\mathcal{C}$, de l'événement A (resp. de la variable aléatoire X).

On note, pour tout n appartenant à $< 0, \infty <$, $\mathcal{A}_n = (T^n)^{-1}(\mathcal{A})$

$$(\mathcal{A}_n = \{A_n \subset \Omega\,; \quad (\exists A \in \mathcal{A})\ A_n = (T^n)^{-1}(A)\}).$$

On pose :

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcap_{n \in < 0,\ \infty <} \mathcal{A}_n .$$

On dit que T est P-*Kolmogorovienne* si et seulement si, pour tout A_∞ appartenant à $\mathcal{A}_\infty$, on a, soit $P(A_\infty) = 0$, soit $P(A_\infty) = 1$.

1° On suppose que T est P-Kolmogorovienne; le but de cette question est d'en déduire qu'elle est P-mélangeante.

Soit A appartenant à $\mathcal{A}$.

a. Démontrer que, si $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$,

$$E^{\mathcal{A}_n}\big(P^{\mathcal{A}_m}(A)\big) = P^{\mathcal{A}_n}(A)$$

et

$$E^{\mathcal{A}_n}\big(P^{\mathcal{A}_m}(A)P^{\mathcal{A}_n}(A)\big) = \big[P^{\mathcal{A}_n}(A)\big]^2.$$

Que peut-on dire de $P^{\mathcal{A}_\infty}(A)$?

b. Démontrer que, si $0 \leqslant m \leqslant n \leqslant \infty$,

$$E\Big[\big(P^{\mathcal{A}_m}(A) - P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)^2\Big] = E\Big[\big(P^{\mathcal{A}_m}(A)\big)^2\Big] - E\Big[\big(P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)^2\Big].$$

c. Démontrer que la suite $\big(P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)_{n \in < 0,\ \infty <}$ converge en moyenne d'ordre 2.

d. Démontrer que la suite $\big(P^{\mathcal{A}_n}(A)\big)_{n \in < 0,\ \infty <}$ converge en moyenne d'ordre 1; démontrer que sa limite est P(A).

e. Soit B appartenant à $\mathcal{A}$; démontrer que :

$$\lim_{n \to \infty} [P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) - P(A)\,P(B)] = 0.$$

2° On reprend la situation de la question I-3°-*c*. T est-elle P-Kolmogorovienne?

3° Soit $(\mathcal{C}_n)_{n \in < 1,\ \infty <}$ une suite croissante de sous-tribus de $\mathcal{A}$, telle que $\mathcal{A}$ soit engendrée par $\bigcup_{n \in < 1,\ \infty <} \mathcal{C}_n$.

On suppose qu'existe une constante strictement positive H telle que, pour tout A appartenant à $\mathcal{A}$, tout n appartenant à $< 1, \infty <$, et tout C_n appartenant à $\mathcal{C}_n$ et vérifiant $P(C_n) \neq 0$, on ait :

$$H\ P(A) \leqslant P^{C_n}[(T^n)^{-1}(A)].$$

Démontrer que, pour tout n appartenant à $< 1, \infty <$, tout A_n appartenant à $\mathcal{A}_n$ et vérifiant $P(A_n) \neq 0$, et tout C_n appartenant à $\mathcal{C}_n$, on a :

$$H\,P(C_n) \leqslant P^{A_n}(C_n).$$

Démontrer que, pour tout A_∞ appartenant à $\mathcal{A}_\infty$ et vérifiant $P(A_\infty) \neq 0$ et tout A appartenant à $\mathcal{A}$, on a :

$$H\,P(A) \leqslant P^{A_\infty}(A).$$

En déduire que T est P-Kolmogorovienne.

III

La notation φ désigne une application de $[0,1]$ dans $[0,\infty]$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) φ est continue et strictement monotone;

(2) *a.* Si φ est strictement croissante, on a :

$$\varphi(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) \in \, < 2, \infty > ;$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a :

$$\varphi(0) \in \, < 3, \infty > \qquad \text{et} \qquad \varphi(1) = 1;$$

(3) En tout t, tel que $\varphi(t)$ appartient à $[0,\infty[$, φ est dérivable et :

a. Si φ est strictement croissante, on a :

$$\inf_{t \in [0,\, 1]} |\, \varphi'(t) \,| > 1;$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a,

$$(\forall\ t_0 \in \,]0,\ 1[) \quad \inf_{t \in]0,\, t_0]} |\, \varphi'(t) \,| > 1.$$

Étant donné n appartenant à $< 1, \infty <$, on dit qu'une suite d'entiers de longueur n, $(a_i)_{i \in < 1,\, n >}$, est φ-régulière si et seulement si elle satisfait aux conditions suivantes :

a. Si φ est strictement croissante, on a :

$$(\forall\ i \in \, < 1, n >) \qquad a_i \in \, < 0, \varphi(1) < .$$

b. Si φ est strictement décroissante, on a :

$$(\forall\ i \in \, < 1, n >) \qquad a_i \in \, < 1, \varphi(0) >$$

et, de plus, s'il existe i tel que $a_i = \varphi(0)$, alors, pour tout j appartenant à $< i, n >$, on a $a_j = \varphi(0)$.

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des suites φ-régulières de longueur n; on pose :

$$\mathcal{S} = \bigcup_{n \in < 1,\, \infty <} \mathcal{S}_n.$$

Pour tout x appartenant à I, on définit les deux suites

$$(r_n(x))_{n \in < 0,\, \infty <} \qquad \text{et} \qquad (\varepsilon_n(x))_{n \in < 1,\, \infty <}$$

par la récurrence suivante :

$$r_0(x) = x$$
$$(\forall\ n \in <1,\ \infty <) \left|\ \begin{aligned} & r_n(x) = \mathcal{F}\big(\varphi(r_{n-1}(x))\big) \\ & \varepsilon_n(x) = \mathcal{E}\big(\varphi(r_{n-1}(x))\big)\,. \end{aligned}\right.$$

La suite $(\varepsilon_n(x))_{n \in <1,\ \infty <}$ est appelée le φ-développement de x.

Soit T l'application de I dans lui-même définie par :

$$(\forall x \in \mathrm{I}) \qquad \mathrm{T}(x) = \mathcal{F}(\varphi(x)).$$

Notre but est de démontrer qu'il existe des probabilités sur $(\mathrm{I}, \mathcal{B})$ conservées par T, et de trouver une condition suffisante pour que T soit P-Kolmogorovienne (et donc P-mélangeante); on considérera en particulier les cas suivants :

α. Développement en base p (où $p \in <2,\ \infty <$) :

$$(\forall\ x \in [0,\ 1]) \quad \varphi(x) = px.$$

β. Développement quadratique :

$$(\forall\ x \in [0,\ 1]) \quad \varphi(x) = (1 + x)^2 - 1.$$

γ. Développement en fraction continue :

$$(\forall\ x \in]0,\ 1]) \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad \varphi(0) = \infty.$$

1° *a*. Démontrer que T est une application mesurable de I dans lui-même.

b. Soit x appartenant à I; exprimer, en fonction du φ-développement de x, le φ-développement de $\mathrm{T}(x)$.

2° *a*. Démontrer que, pour tout x appartenant à I, et tout n appartenant à $<1,\infty<$, la suite $\big(\varepsilon_i(x)\big)_{i \in <1,\ n>}$ est φ-régulière.

b. Réciproquement, à toute suite φ-régulière de longueur n,

$$s = (a_i)_{i\ \in\ <1,\ n>}\ ,$$

on associe :

$$\Delta_s = \{\, x \in \mathrm{I};\ (\forall\ i \in <1,\ n>) \quad \varepsilon_i(x) = a_i \,\}.$$

Démontrer que les Δ_s forment, quand s parcourt $\mathcal{S}_n$, une partition de I en intervalles non vides.

Démontrer l'égalité : $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\ \sup_{s\in\mathcal{S}_n}\ \lambda(\Delta_s) = 0.$

Pour tout n appartenant à $<1,\infty<$, on note $\mathcal{C}_n$ l'ensemble des unions des familles dénombrables d'intervalles Δ_s (où s appartient à $\mathcal{S}_n$).

Quelle est la tribu engendrée par

$$\bigcup_{n \in <1,\ \infty <} \mathcal{C}_n\,?$$

3° *a*. Soit P une probabilité sur $(\mathrm{I},\mathcal{B})$; pour tout s appartenant à $\mathcal{S}$, on pose :

$$p_s = \mathrm{P}(\Delta_s).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur la famille $(p_s)_{s\,\in\,\mathcal{S}}$, pour que T conserve P.

b. Inversement, soit donnée une famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$ d'éléments de $[0,1]$; établir une condition nécessaire et suffisante pour qu'existe une probabilité P sur $(\mathrm{I},\mathcal{B})$, conservée par T, telle que :

$$(\forall s \in \mathcal{S}) \quad \mathrm{P}(\Delta_s) = p_s$$

(on pourra chercher à déterminer P par la restriction de sa fonction de répartition à l'ensemble des extrémités des intervalles Δ_s).

Démontrer qu'on peut choisir la famille $(p_s)_{s \in \mathcal{S}}$ de manière que pour tout n appartenant à $< 1,\infty <$, les n variables aléatoires ε_i $(i \in < 1, n >)$ soient indépendantes.

c. On reprend les cas particuliers α. et γ. cités ci-dessus. Démontrer que l'application T conserve :

— dans le cas α. la probabilité λ;

— dans le cas γ. la probabilité admettant pour densité par rapport à λ la fonction définie sur I par :

$$x \longmapsto \frac{1}{\mathrm{Log}\, 2} \, \frac{1}{1+x}.$$

4° Soit P une probabilité sur $(\mathrm{I},\mathcal{B})$, conservée par T; on suppose de plus que :

(A) Il existe deux nombres réels strictement positifs, K_1 et K_2, tels que P soit absolument continue par rapport à λ, de densité $\dfrac{d\mathrm{P}}{d\lambda}$ vérifiant :

$$\mathrm{K}_1 \leqslant \frac{d\mathrm{P}}{d\lambda} \leqslant \mathrm{K}_2 \,;$$

(B) Il existe un nombre réel strictement positif K tel que, pour tout intervalle $[x,y[$ de I, tout n appartenant à $< 1,\infty <$ et tout s appartenant à $\mathcal{S}_n$, on ait :

$$\lambda((\mathrm{T}^n)^{-1}([x,y[) \cap \Delta_s) \geqslant \mathrm{K}(y-x)\, \lambda(\Delta_s).$$

Démontrer qu'est satisfaite la condition, établie à la question II 3°, pour que T soit P-Kolmogorovienne.

5° *a.* Démontrer que la condition (A) est satisfaite pour chacune des probabilités considérées en III-3°-*c*.

b. Démontrer qu'il existe, pour tout n appartenant à $< 1,\infty <$, et tout s appartenant à $\mathcal{S}_n$, et tel que $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, une application Ψ_s de I dans lui-même, strictement monotone, et telle que, pour tout intervalle $[x,y[$ de I, $\Delta_s \cap (\mathrm{T}^n)^{-1}([x,y[)$ soit un intervalle d'extrémités $\Psi_s(x)$ et $\Psi_s(y)$.

Démontrer que la condition (B) est satisfaite dans chacun des cas particuliers α. β. et γ.

(On pourra passer par les étapes suivantes :

Cas β : pour tout s appartenant à $\mathcal{S}$, et vérifiant $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, on a :

$$\inf_{x \in \mathrm{I}} |\Psi'_s(x)| \geqslant \frac{1}{2} \sup_{x \in \mathrm{I}} |\Psi'_s(x)|;$$

Cas γ : $s = (a_i)_{i \in < 1, n >}$ étant une suite régulière telle que $\mathrm{P}(\Delta_s) \neq 0$, si $(\alpha_i)_{i \in < 0, n >}$ et $(\beta_i)_{i \in < 0, n >}$ sont les suites solutions de l'équation de récurrence :

$$(\forall i \in < 2, n >) \quad x_i = a_i x_{i-1} + x_{i-2}$$

qui vérifient les conditions initiales $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = a_1$, alors, pour tout x appartenant à I, on a :

$$\Psi'_s(x) = \frac{\alpha_n + x\,\alpha_{n-1}}{\beta_n + x\,\beta_{n-1}}\Big).$$

RAPPORT SUR LA COMPOSITION DE PROBABILITES ET STATISTIQUE

GENERALITES

Ce problème a été suggéré par certaines questions de Théorie Ergodique; le thème central en était la notion de transformation mélangeante sur un espace de probabilité.

Dans la première partie, on s'assure tout d'abord (1°) que, pour que T soit mélangeante, il suffit que soit vérifiée une condition portant uniquement sur un clan qui engendre la tribu des événements ; les seuls outils nécessaires sont ici la notion de tribu engendrée par un clan et le théorème de prolongement de Carathéodory, qu'on avait pris soin de rappeler dans l'introduction de l'énoncé. On démontre ensuite (2°) une condition nécessaire et suffisante de mélange, qui est due à Blum et Hanson ([3]), et dans la démonstration de laquelle interviennent les relations entre les convergences dans L^2, dans L^1 et stochastique ([6], III, 3° alinéa). Enfin, en 3°, on étudie trois exemples élémentaires (qu'on peut trouver, ainsi que bien d'autres dans [1], chapitre I), faisant intervenir respectivement les probabilités sur ensemble fini, la loi uniforme sur un segment ([6], I, 5° alinéa) et l'indépendance des variables aléatoires ([6], II, 7° alinéa).

La deuxième partie consiste en l'étude d'une condition suffisante de mélange, à savoir le caractère Kolmogorovien. Pour démontrer que c'est bien une condition suffisante (1°), on utilise, comme dans [1], chapitre III, 11, la convergence des martingales inversées ; ici, nous nous contentons de faire intervenir la convergence dans L^2, puis dans L^1 ; le seul outil nécessaire pour cela est la définition de l'espérance conditionnelle par rapport à une sous-tribu ([6], II, 4° alinéa). En 2° et 3°, on donne deux exemples de transformations Kolmogoroviennes : le 2° est une application immédiate de la loi du tout ou rien ([6], III, 4° alinéa) ; le 3°, qui est destiné à être utilisé dans la troisième partie, fait intervenir des calculs élémentaires sur les probabilités conditionnelles relatives à des événements de probabilité non nulle ([6], II, 1^er^ alinéa) et, une fois encore, le théorème de prolongement de Carathéodory.

La troisième partie a été inspirée par un article de Rényi ([7]), dont on a un peu simplifié les hypothèses (en supposant φ dérivable, et prenant en 0 et 1 des valeurs entières ou infinies) et modifié la présentation afin de mettre l'accent sur le caractère Kolmogorovien, et non seulement sur le caractère ergodique, de la transformation étudiée (ainsi qu'il est fait en [1], chapitre 1, 4, dans le cas particulier de la représentation d'un nombre réel en fraction continue) ; cette partie ne fait appel, comme connaissances purement probabilistes, qu'aux notions de densité et de fonction de répartition ([6], I, 4° alinéa) et, à nouveau, d'indépendance des variables aléatoires ; par contre, elle nécessite, pensons-nous, une certaine habileté de calcul, au niveau de l'analyse élémentaire ; à ce propos, le lecteur pourra étudier avec profit les articles de Bissinger ([2]) et Everett ([4]), qui furent utilisés par Rényi dans [7].

Première Partie

I - 1° - La démonstration des conditions suffisantes figurant dans cette question a arrêté de très nombreux candidats. Pourtant, le a. peut se traiter en 3 lignes :

« les applications de $\mathcal{A}$ dans [0,1], P et $P \circ T^{-1}$, sont toutes deux des probabilités ; elles coïncident sur $\mathcal{C}$, clan qui engendre $\mathcal{A}$; donc elles coïncident sur $\mathcal{A}$ ».

(voir, dans le RAPPEL, le membre de phrase : « Alors P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$ »).

Par contre le b. nécessite un raisonnement un peu plus élaboré ; on peut en particulier utiliser la dernière ligne du RAPPEL (c'est-à-dire la densité de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{A}$ pour la topologie définie sur $\mathcal{A}$ par l'écart d défini par $d(A, B) = P(A \triangle B)$).

Voici les types d'erreurs les plus fréquents :

- «C'est évident parce que P est entièrement déterminée par sa restriction à $\mathcal{C}$ » (ceci pour le b. comme pour le a.) ;
- «Toute partie de $\mathcal{A}$ est de la forme $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ où les A_i sont des éléments de $\mathcal{C}$ » (ceci souvent «justifié» par le théorème : la tribu et la classe monotone engendrés par un clan coïncident) ; cette erreur connaît plusieurs variantes, soit plus grossières («tout élément de $\mathcal{A}$ est union finie d'éléments de $\mathcal{C}$ »), soit plus subtiles («union dénombrable d'intersections dénombrables d'éléments de $\mathcal{C}$ ») ;
- « $\mathcal{A}$ se construit en effectuant une infinité de fois des unions et intersections dénombrables à partir des éléments de $\mathcal{C}$ » ; il faut savoir que la construction de $\mathcal{A}$ à partir de $\mathcal{C}$ nécessite une récurrence transfinie (voir par exemple [5], p. 26) et qu'une telle démonstration imposerait donc de s'assurer que la propriété considérée «passe bien» pour les ordinaux de deuxième espèce comme pour ceux de première espèce, ce qui serait ici bien trop compliqué ;
- «démonstration» de a. à l'aide de la dernière ligne du rappel : vouée à l'échec, car, si à A et $\varepsilon > 0$, on associe C tel que $P(A \Delta C) < \varepsilon$, et $P(T^{-1}(C)) = P(C)$, il faudrait, pour pouvoir en déduire que $P(T^{-1}(A)) = P(A)$, s'assurer qu'on a aussi une relation entre $P(T^{-1}(A \Delta C))$ et $P(A \Delta C)$; or rien ne permet de l'obtenir, puisqu'on ne peut affirmer que $A \Delta C$ appartient à $\mathcal{C}$; pourtant, cette affirmation figure, de manière plus ou moins voilée selon les scrupules du candidat, dans toutes les copies ayant tenté une telle méthode ;
- en a., considérer $\mathcal{D} = \{ A \in \mathcal{A} \ ; P(T^{-1}(A)) = P(A) \}$, et « démontrer que c'est une tribu» ; idée intéressante, mais ici inopérante car rien ne permet d'établir que $\mathcal{D}$ est fermé pour l'intersection (le candidat s'en tire généralement en vérifiant que $\mathcal{D}$ est fermé pour la complémentation et l'union dénombrable de parties disjointes, et en en «déduisant» que c'est une tribu) ; par contre, il est correct de démontrer que $\mathcal{D}$ est une classe monotone, et contient donc la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$, qui n'est autre, puisque $\mathcal{C}$ est un clan, que la tribu engendrée par $\mathcal{C}$;
- «Soit $A = \lim\limits_{p \to \infty} A_p$ et $B = \lim\limits_{p \to \infty} B_p$; alors

$$\lim_{n \to \infty} P(A \cap (T^n)^{-1}(B)) = \lim_{n \to \infty} \lim_{p \to \infty} P(A_p \cap (T^n)^{-1}(B_p))$$
$$= \lim_{p \to \infty} \lim_{n \to \infty} P(A_p \cap (T^n)^{-1}(B_p)) = \dots \text{ »}$$

(l'interversion des limites étant parfois justifiée par : «parce que tous les termes sont positifs»)

I.- 2° - De nombreux candidats sont gênés par les calculs du premier alinéa de a. ou du deuxième alinéa de b., soit qu'ils y renoncent, soit qu'ils s'en tirent après plusieurs pages de développements et regroupements de termes menés sans aucun ordre ; dans le calcul du deuxième alinéa de b., il faut aussi faire attention à l'emploi des valeurs absolues (on a $E(|X|) \geqslant |E(X)|$, et non le contraire).

Par ailleurs, peu de candidats savent démontrer que, de $\lim\limits_{n \to \infty} d_n = 0$, on peut déduire que :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i \in <o,n<} \left(\frac{1}{n} \sum_{j \in <o,n<} d_{|k_i - k_j|} \right) = 0 \ ;$$

une erreur très grossière, mais plusieurs fois rencontrée, est d'invoquer ici des résultats sur les séries (en particulier la convergence de la série de terme général $1/n^2$) ; mais l'erreur la plus fréquente consiste à dire «on applique deux fois le théorème sur la convergence d'une suite au sens de Césaro» (souvent après avoir démontré le dit théorème, ce qui, au niveau de l'agrégation, nous paraît inutile) : ou bien on ne précise pas à quelles suites on «l'applique», ou bien on parle de «la suite ($\frac{1}{n} \sum_{j \in <o,n<} d|k_i - k_j|$), ce qui ne veut rien dire ; très souvent aussi on trouve ici, au lieu d'un texte mathématique, des expressions imprécises (du type «somme de deux termes dont l'un est négligeable» ou « $\frac{1}{n^2}$ (quelque chose en $n^2 \times \varepsilon$)"), qui ne correspondent en général pas au raisonnement correct qu'il eût fallu faire.

Enfin, si on sait en général que la convergence en moyenne d'ordre 2 entraîne la convergence stochastique, on croit souvent que la convergence stochastique entraîne la convergence en moyenne d'ordre 1 (ce n'est vrai que si les variables aléatoires sont uniformément intégrables, ce qui est le cas ici, puisqu'elles sont uniformément bornées).

I - 3° -

a. Question très élémentaire ; il suffit de l'aborder avec méthode pour s'assurer que les seules probabilités conservées par T sont celles qui sont uniformes sur chaque orbite de T, et que les seules qui soient mélangeantes sont les mesures de Dirac en un point conservé par T ; c'est, semble-t-il, cette méthode (ainsi que peut-être, dans certains cas, les connaissances élémentaires sur la décomposition des substitutions) qui fait défaut à plusieurs candidats.

b. Les réponses correctes sont oui, puis non : la plupart des candidats ayant abordé cette question le voient, mais assez rares sont ceux qui l'ont démontré ; il faut utiliser le I 1°, en prenant pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des unions finies d'intervalles.

c. Ici encore, il faut utiliser le I 1°. De nombreux candidats veulent le faire, mais la majorité d'entre eux prend pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties de la forme $(X_n)^{-1}(B)$, où n est un entier et B est une partie borélienne de $\mathbb{R}$ (et n'a alors plus besoin de l'hypothèse d'indépendance) ; or cet ensemble de parties n'est pas un clan ; il faut prendre pour $\mathcal{C}$ l'ensemble des unions finies d'intersections finies des parties du type précédent ; la démonstration fait alors bien intervenir l'indépendance des variables aléatoires X_n (sans quoi le résultat serait faux).

Deuxième Partie

Sur 356 copies corrigées dans l'agrégation masculine, 252 se sont vu attribuer la note 0 pour cette partie, soit qu'elles ne l'abordent pas (c'est-à-dire, pour nombre d'entre elles, soient passées directement au III), soient qu'elles n'y disent rien de valable (dans certaines, par exemple, on traite les probabilités par rapport à des sous-tribus comme s'il s'agissait de probabilités par rapport à des événements). Il semble donc qu'il y ait là, dans les connaissances des candidats, une lacune assez généralisée.

II. - 1° -

Le a. et le b. sont quasiment des questions de cours sur l'espérance conditionnelle et, une fois abordés avec les outils nécessaires, sont en général correctement effectués.

La solution du c. consiste à remarquer que la suite $(E((P^{\mathcal{B}_n}(A))^2))$ étant formée de termes réels positifs et, d'après b., décroissante, elle converge, donc est de Cauchy ; il en résulte, toujours d'après b., que la suite $(P^{\mathcal{B}_n}(A))$ est de Cauchy dans L^2, donc converge dans L^2 puisque cet espace est complet. Mais de nombreux candidats affirment dès ici (sans doute parce que, en a. et b., m et n peuvent être égaux à ∞) que $E((P^{\mathcal{B}_n}(A))^2)$ tend vers $E((P^{\mathcal{B}_\infty}(A))^2)$; cela revient à dire que toute suite décroissante de nombres réels positifs converge vers 0, et est assez souvent accompagné de «justifications» du type : « $\mathcal{B}_n$ et $\mathcal{B}_m$ tendent à se confondre dans $\mathcal{B}_\infty$, donc ...» .

En fait ce n'est qu'en d. qu'on peut faire intervenir $P^{\mathcal{B}_\infty}(A)$ comme limite, car ce n'est autre que la constante P(A) (c'est ce qu'il faut répondre à la fin de a.) ; or $P^{\mathcal{B}_n}(A)$ tend, dans L^1, vers P(A) pour la raison suivante : la limite est, pour tout n, $\mathcal{A}_n$- mesurable ; elle est donc $\mathcal{A}_\infty$-mesurable, donc p.s. constante ; soit k cette constante ; on a alors

$$k = \int_\Omega k\, dP = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega P^{\mathcal{A}_n}(A)\, dP = \lim_{n \to \infty} P(A) = P(A).$$

e. faisait intervenir, une fois encore, la définition de $P^{\mathcal{A}_n}(A)$, et le fait que $\lim_{n \to \infty} \int_\Omega |P^{\mathcal{A}_n}(A) - P(A)|\, dP = 0$

II. 2° - Plusieurs candidats savent voir qu'il s'agit ici d'une application directe de la loi du tout ou rien de Kolmogorov (c'est d'ailleurs là l'origine de l'expression «transformation P-Kolmogorovienne»).

II. 3° - Question faite de calculs simples ; nombre des candidats l'ayant abordée savent la mener à bien.

Troisième Partie

Les copies où cette partie est abordée se limitent généralement aux questions suivantes : 1°, 2° a. et début de 2° b.

III. 1° et 2° a. Ces questions, quand elles sont traitées, le sont en général correctement, quoique assez lourdement (on trouve parfois deux à trois pages de raisonnement par récurrence pour s'assurer que $\varepsilon_n(T(x)) = \varepsilon_{n+1}(x)$) ; la condition supplémentaire de φ – régularité nécessaire dans le cas où φ est décroissante est parfois oubliée ou mal comprise, faute sans doute d'une lecture suffisamment attentive de l'énoncé.

III. 2° - b. Il est souvent démontré que $(\Delta_s)_{s \in \mathcal{S}_n}$ est une partition de I, moins souvent qu'il s'agit d'intervalles, plus rarement encore que ces intervalles sont non vides (quoique parfois réduits à un point) ; c'est pourtant là la raison des conditions, à première vue un peu artificielles, intervenant dans la définition des suites φ– régulières.

L'étude de l'égalité $\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda(\Delta_s) = 0$ donne lieu à trois types principaux d'erreurs : la plus grossière consiste à confondre $\lim_{n \to \infty} \sup_{s \in \mathcal{S}_n}$ avec une limite supérieure $(\overline{\lim}_{n \to \infty})$ et, en général alors, à invoquer le théorème de Borel-Cantelli ; la plus fréquente est de démontrer seulement que $(\sup_{s \in \mathcal{S}_n} \lambda(\Delta_s))$ est une suite décroissante de nombres réels positifs, et à en «déduire» que sa limite est 0 ; la plus subtile se ramène à utiliser l'existence d'un nombre réel $k > 1$, (et donc tel que $(1/k)^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini), vérifiant $|\varphi(b) - \varphi(a)| \geqslant k\,|b - a|$ pour tout couple (a, b) d'éléments de I ; or, avec nos hypothèses, ceci n'est vrai que pour φ croissante (et est en particulier faux dans le cas des développements en fraction continue).

Pour la démonstration dans le cas où φ est décroissante, ainsi que pour toute la suite du problème (qui n'a été abordée que dans de très rares copies, et encore ponctuellement), nous renvoyons le lecteur à [7] (ou à [1], 1, 4 s'il s'intéresse uniquement au cas du développement en fraction continue).

CONCLUSION

Les plus grosses lacunes proprement probabilistes relevées lors de la correction des copies nous semblent être dans les domaines suivants :

- clans et tribus (voir en particulier nos remarques sur les erreurs relevées en I.1°.a. et I.3°.c.)
- probabilités conditionnelles
- rapports entre les différents types de convergence

Par ailleurs nous remarquons des insuffisances dans :

- l'aptitude au calcul (les candidats devraient s'efforcer de mener les calculs avec plus de méthode)
- le maniement de l'analyse élémentaire (voir en particulier nos remarques sur I. 2°. et II. 1°. c.)

BIBLIOGRAPHIE

[1] P. BILLINGSLEY. *Ergodic theory and information.* Wiley, N.Y., 1965

[2] B.H. BISSINGER. A generalization of continued fractions. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 50 (1944), 868-876.

[3] J.R. BLUM and D.L. HANSON. On the mean ergodic theorem for subsequences. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 66 (1960), 308-311.

[4] P.J. EVERETT. Representation for real numbers. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 52 (1946), 861-869.

[5] P.R. HALMOS. *Measure Theory.* Van Nostrand, Princeton, 1950.

[6] PROGRAMMES des épreuves écrites et orales des agrégations de mathématiques (candidats et candidates) pour la session de 1970, Probabilités et Statistiques, Note du 24 septembre 1969, *Bull. Off. Ed. Nat.*, n° 37 (2-10-1969) (reconduits pour 1972 par la note du 13 juillet 1971, *Bull. Off. Ed. Nat.* n° 29 (22-7-1971).

[7] A. RENYI. Representation of real numbers and their ergodic properties, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.*, 8 (1957), 477-493.

RENSEIGNEMENTS STATISTIQUES

<u>Agrégation masculine</u>

Nombre de copies corrigées : 356

Moyenne : 10,5 (sur 40)

Quantiles supérieurs :

- d'ordre 2 (médiane) : 9 (172 copies ont une note ⩾ 9)
- d'ordre 3 : 13 (121 copies ont une note ⩾ 13)
- d'ordre 4 : 16 (92 copies ont une note ⩾ 16)
- d'ordre 5 : 19 (73 copies ont une note ⩾ 19)

Répartition des notes par classes d'amplitude 5 :

0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
23	119	66	56	40	31	18	2	1

- 1 copie a obtenu la note 40.

<u>Agrégation féminine</u>

n = 0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
10	138	52	19	16	7	1	2	0