ANALYSE

On désigne :

— par $\mathbf{Z}$ (resp. $\mathbf{N}$) l'ensemble des entiers relatifs (resp. naturels);

— par (x_1, x_2, x_3) le point courant de $\mathbf{R}^3$;

— par $\mathbf{R}_1$ [resp. $\mathbf{R}_2$ et $\mathbf{R}_3$] le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(x_1, 0, 0)$ [resp. $(0, x_2, 0)$ et $(0, 0, x_3)$];

— par (z, x_3) le point courant de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, $\mathbf{C}_1$ étant le sous-espace formé par les vecteurs de la forme $(z, 0)$.

On identifie $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ à $\mathbf{R}^3$ par la relation $(z, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$ avec $z = x_1 + ix_2$.

Si A et B sont deux parties non vides de $\mathbf{R}^n$, $A + B$ désigne l'ensemble des vecteurs $X + Y$, où X parcourt A et Y parcourt B.

Si Ω est un ouvert non vide de $\mathbf{R}^n$ et ω une partie de Ω, $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions à valeurs complexes indéfiniment différentiables sur Ω et $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$ la partie de $\mathcal{D}(\Omega)$ constituée par celles qui s'annulent sur ω; pour $n = 3$, $H(\Omega)$ est formé par les fonctions f de $\mathcal{D}(\Omega)$ telles que, pour tout nombre c réel, la fonction partielle $z \longmapsto f(z, c)$ soit holomorphe sur la section de Ω par le plan d'équation $x_3 = c$; la dérivée de cette fonction sera notée $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

I

On désigne par S l'ensemble des suites doubles $\mathbf{a} = (a_{p,q})$ à valeurs complexes indexées par $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$. Étant donné $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ dans S, $\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ désignera l'ensemble des suites $\mathbf{c}$ de S vérifiant pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$:

$$c_{p+1,q} = a_{p,q}\, c_{p+2,q+1} + b_{p,q}\, c_{p,q+2}\,.$$

1° Soit k un entier donné quelconque dans $\mathbf{N}$. Démontrer l'existence de fonctions $\Gamma_{i,j,k}$ polynomiales des $a_{p,q}$ et $b_{p,q}$, à coefficients positifs, et telles que pour tout $\mathbf{c}$ dans $\mathcal{R}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ on ait :

$$c_{0,0} = \sum_{\substack{i+2j=3k \\ k \leqslant j \leqslant 2k}} \Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b})\, c_{i,j}\,.$$

2° Soit $\mathbf{a}' = (a'_{p,q})$ et $\mathbf{b}' = (b'_{p,q})$ deux suites à valeurs réelles de S, telles que pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$ vérifiant $|p + 1| \leqslant q$, on ait :

$$|a_{p,q}| \leqslant a'_{p,q} \qquad \text{et} \qquad |b_{p,q}| \leqslant b'_{p,q}\,.$$

Démontrer alors : $|\Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}, \mathbf{b})| \leqslant \Gamma_{i,j,k}(\mathbf{a}', \mathbf{b}')$.

3° Soit $\boldsymbol{\varepsilon}$ la suite de S définie par $\varepsilon_{p,q} = \dfrac{\alpha}{q+1}$ $(\alpha \in \mathbf{C},\ \alpha \neq 0)$.

Vérifier l'inégalité : $|\Gamma_{i,j,k}(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon})| \leqslant \dfrac{|2\alpha|^k}{k!}$.

4° Soit A, λ et μ trois constantes réelles positives et $(\theta_p)_{p \in \mathbf{Z}}$ une suite de nombres complexes vérifiant $|\theta_p| \leqslant 1$ pour tout p. Démontrer que, si $\mathbf{c}$ est une suite de S vérifiant les relations :

$$c_{p+1,q} = \frac{\theta_p}{q+1}\, c_{p+2,q+1} + \frac{\mu\,(p+1)}{(q+1)(q+2)}\, c_{p,q+2} \quad \text{et} \quad |c_{p,q}| \leqslant \lambda\, A^{p+2q}$$

pour tout couple $(p, q) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{N}$, alors il existe un nombre M, ne dépendant que de A, λ, μ, p, q, tel qu'on ait pour tout $k \geqslant 1$

$$|c_{p,q}| \leqslant \frac{M^k}{(k-1)!}.$$

(On pourra commencer par majorer $|c_{0,0}|$, puis ramener le cas général au cas précédent par une translation des indices.)

En déduire que les $c_{p,q}$ sont nuls.

II

Le point courant de $\mathbf{R}^2$ est noté (x, y); on étudie l'opérateur différentiel $D = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \boldsymbol{a}(x)\frac{\partial}{\partial y} + \boldsymbol{b}\frac{\partial}{\partial x}$, où $\boldsymbol{a}$ est une fonction polynomiale du premier degré à coefficients complexes et $\boldsymbol{b}$ une constante complexe.

1° Π est le demi-plan formé par les points (x, y) vérifiant $y > 0$; K est une partie bornée contenue dans Π. Démontrer que toute fonction f de $\mathcal{D}(\Pi)$, nulle en dehors de K, bornée sur K ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux et vérifiant $Df = 0$, est nulle sur Π tout entier. (Pour cela, on pourra poser pour tout couple (p, q) de $\mathbf{Z} \times \mathbf{N}$

$$c_{p,q} = \iint_{\Pi} [\boldsymbol{a}(x)]^p y^q f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{si} \quad p \geqslant 0$$

$$c_{p,q} = 0 \qquad\qquad \text{si} \quad p < 0.$$

puis montrer que la suite $\mathbf{c} = (c_{p,q})$ vérifie les conditions du I 4° et en déduire le résultat).

2° Ω et ω sont deux ouverts convexes non vides de $\mathbf{R}^2$ vérifiant $\omega \subset \Omega \subset \omega + \mathbf{R}_2$ et $\omega \neq \Omega$;

$\complement\omega$ désigne le complémentaire de ω dans $\mathbf{R}^2$. Soit dans $\mathbf{R}^2$ une parabole $\mathcal{P}$ d'axe parallèle à $\mathbf{R}_2$ et d'équation

$$\varphi(x, y) = \alpha y - (x^2 + \beta x + \gamma) = 0;$$

$\mathcal{P}_i$ désigne l'intérieur de la parabole, c'est-à-dire l'ensemble

$$\{(x, y) \mid \varphi(x, y) > 0\}.$$

a. Soit M un point donné dans $\Omega \cap \complement\omega$; démontrer qu'on peut choisir $\mathcal{P}$ de façon que M appartienne à $\mathcal{P}_i$ et que la composante connexe δ de $\mathcal{P}_i \cap \complement\omega$ contenant M soit relativement compacte et contenue dans Ω. $\mathcal{P}$ est ainsi choisie dans la suite.

b. Soit v une fonction de $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$. Démontrer que la fonction $\tilde{v}$, qui est nulle en dehors de δ et coïncide avec v sur δ, appartient à $\mathcal{D}(\mathcal{P}_i)$.

c. Soit Φ l'application : $(x, y) \longmapsto \big(x, \varphi(x, y)\big)$. Démontrer que l'application $g \longmapsto g \circ \Phi$ définit une bijection de $\mathcal{D}(\pi)$ sur $\mathcal{D}(\mathcal{P}_i)$.

Expliciter en fonction de (α, β, γ) l'opérateur différentiel $\tilde{D}$ tel que pour tout g de $\mathcal{D}(\pi)$ on ait : $D(g \circ \Phi) = (\tilde{D}g) \circ \Phi$.

3° Déduire des questions précédentes que D est un opérateur injectif sur $\mathcal{D}(\omega, \Omega)$.

4° Démontrer que ce résultat subsiste pour l'opérateur

$$D_0 = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \boldsymbol{b}\frac{\partial}{\partial x}.$$

III

On étudie l'opérateur différentiel $\Delta = \dfrac{\partial}{\partial z} - i \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^{\,2}}$ défini sur les ensembles H (Ω) introduits dans le préambule.

Soit M un point (ζ, c) donné dans $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° Soit α un nombre complexe.

a. Démontrer que l'équation $\Delta u = 0$ a dans $\mathrm{H}(\mathbf{C} \times \mathbf{R})$ une solution unique de la forme $\Psi(z)e^{\alpha x_3}$ et satisfaisant à $u(\zeta, c) = 1$. On appelle U_n cette solution pour $\alpha = \sqrt{n}\, e^{i\theta}$ $(n \in \mathbf{N},\ \theta$ réel donné).

b. Démontrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{U}_n$ converge uniformément et absolument sur tout compact d'un demi-espace ouvert P_θ ayant M comme point frontière, et que la somme s de cette série est une fonction de $\mathrm{H}(\mathrm{P}_\theta)$ vérifiant $\Delta s = 0$.

c. Démontrer que s n'est pas bornée au voisinage de M.

2° Soit P le plan d'équation $x_2 = 0$ et $\tilde{\Delta}$ l'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x_1} - i \dfrac{\partial^2}{\partial x_3^{\,2}}$.
Étant donné un demi-plan Π_1 de P, dont la frontière est parallèle à $\mathbf{R}_1$ ou $\mathbf{R}_3$, et un point M de cette frontière, démontrer qu'il existe une fonction h de $\mathcal{D}(\Pi_1)$ non bornée au voisinage de M et vérifiant $\tilde{\Delta} h = 0$.

IV

On suppose que Ω est une partie non vide, ouverte et convexe de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$.

1° *a.* Démontrer que, si A est une partie convexe de Ω ayant plus d'un point et contenue dans un plan parallèle à $\mathbf{C}_1$, alors toute fonction de H(Ω), qui s'annule sur A, s'annule aussi sur $(\mathrm{A} + \mathbf{C}_1) \cap \Omega$.

b. Démontrer que, si B est une partie convexe de Ω contenue dans le plan d'équation $x_2 = a$ et formant un ouvert non vide de ce plan, alors toute fonction u de H (Ω), qui s'annule sur B et vérifie $\Delta u = 0$, s'annule nécessairement sur $(\mathrm{B} + \mathbf{R}_3) \cap \Omega$.

2° Démontrer que deux points quelconques de Ω peuvent être joints par une ligne polygonale dont les côtés sont parallèles soit à $\mathbf{C}_1$, soit à $\mathbf{R}_3$.

3° On suppose que la partie ω de Ω est un ouvert non vide, convexe, borné du plan P d'équation $x_2 = 0$; $\mathcal{E}(\Omega)$ [resp. $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$] désigne l'ensemble des solutions dans H(Ω) [resp. $\mathcal{D}(\omega)$] de l'équation $\Delta u = 0$ [resp. $\tilde{\Delta} w = 0$]
Pour tout u de H(Ω), $\tilde{u}$ est la restriction de u à ω.

Démontrer que l'application $u \longmapsto \tilde{u}$ est une injection de $\mathcal{E}(\Omega)$ dans $\tilde{\mathcal{E}}(\omega)$.

Démontrer, à l'aide des résultats de la partie III, que cette application n'est pas surjective.

COMPOSITION D'ANALYSE

Le problème est inspiré par un article d'Hörmander, traitant les propriétés de l'opérateur D dans le cas plus général où a et b sont des fonctions analytiques. La partie I du problème constitue un préliminaire établissant aisément ces propriétés avec les hypothèses restrictives faites sur a et b. Les parties III et IV ont pour objet de prouver que l'application $u \to \tilde{u}$ n'est pas surjective. On peut affirmer, hélas !, que l'idée générale du problème échappe, à quelques dizaines près, à la totalité des candidats ; le fait de prendre du recul et de voir cette étude dans son ensemble reste la marque des copies vraiment bonnes.

La longueur du problème a été compensée, selon la coutume, par un barème assez large, accordant une centaine de points à la copie idéale. Ce barème a tenu compte des négligences matérielles qui se sont glissées dans le texte, puisque l'ensemble des deux premières parties était coté pour cinquante-cinq points environ, et les copies, qui sur les points litigieux ont manifesté quelque embarras, ont été jugées et notées avec indulgence. Responsable en partie de l'étirement du texte, la décomposition des difficultés, donc des questions, provoquée par le souci de guider les candidats, a conduit à une répartition plus ponctuelle des notes et à un classement plus fin. Finalement, aucun candidat n'ayant donné une solution complète du problème, les correcteurs ont obtenu un étalement continu des notes entre 0 et 60. Des points supplémentaires étaient par ailleurs prévus pour récompenser une démonstration habile, une présentation soignée ou une rédaction montrant une bonne compréhension du rôle joué par la question traitée. Toutefois, bien des candidats ont pu dans ces conditions glaner beaucoup de points dans les questions faciles, malgré, – et l'oral l'a révélé – des connaissances assez médiocres en analyse.

REMARQUES GENERALES

- Alors que la partie I, qui met en place la très classique méthode des séries majorantes, ne nécessite que des connaissances fort réduites, trop de candidats se sont enlisés dans des discours trop vagues ou des considérations interminables, faute d'un effort de réflexion pour dégager les idées simples permettant de rédiger une solution simple (Cf plus bas).
- Dans la partie II, une trop grande désinvolture vis-à-vis des justifications de calcul coûte de nombreux points à de nombreux candidats.
- La partie III, malgré le caractère élémentaire et classique des questions posées, souvent d'un honnête niveau de MP2, semble avoir constitué un obstacle insurmontable. Ne voit-on pas certains candidats ne pas savoir intégrer une équation différentielle linéaire du premier ordre !
- Les parties non triviales de la partie IV n'ont pratiquement pas été abordées.

Partie I

1°, 2° et 3° - Ces trois questions sont traitées par la majorité des candidats, mais trop souvent au prix de développements bien filandreux. Il suffit pourtant de noter que les coefficients $\Gamma_{i,j,k}$ sont combinaisons linéaires d'au plus deux $\Gamma_{i,j,k-1}$ avec des coefficients $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ tels que $i+1+2j=3k$, $k \leqslant j \leqslant 2k$

Un certain nombre de candidats omettent de vérifier que l'expression de $\Gamma_{i,j,k}$ en fonction des $a_{i,j}$ et des $b_{i,j}$ ne fait intervenir que des couples (i,j) satisfaisant à $|i+1| \leqslant j$, et cette remarque est nécessaire pour répondre correctement à la deuxième question. Indiquons aussi que le fait de prouver dans un raisonnement par récurrence que la propriété à démontrer est vraie pour $k = 0, 1, 2$ (et parfois 3, voire 4) n'apporte aucun point supplémentaire au candidat !

4° - Un nombre déjà plus restreint de candidats savent montrer l'inégalité $|c_{o,o}| \leqslant \lambda \dfrac{(k+1)M^k}{k!}$. D'autres, pour obtenir plus rapidement la majoration proposée par l'énoncé, affirment froidement qu'il y a k entiers j vérifiant $k \leqslant j \leqslant 2k$. Etant arrivés tant bien que mal à prouver $|c_{o,o}| \leqslant \lambda \dfrac{M_o^k}{(k-1)!}$, certains posent $M = \lambda^{\frac{1}{k}} M_o$ pour montrer l'existence d'une «constante» M telle que l'on ait $|c_{o,o}| \leqslant \dfrac{M^k}{(k-1)!}$. Signalons que, le but de la question étant de montrer $c_{o,o} = 0$, la première majoration obtenue suffit, et que l'emploi de la formule de Strirling pour vérifier $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{M^k}{k!} = 0$ manque de simplicité.

Enfin, pour démontrer la nullité de c_{p_o, q_o} pour tout p_o et tout q_o positifs ou nuls, il convient d'introduire la suite $\gamma_{p,q} = \gamma_{p+p_o, q+q_o}$ et de vérifier qu'elle satisfait une relation de récurrence analogue, avec des coefficients encore majorés par $\beta(q+1)^{-1}$, où β est une constante bien choisie.

Partie II

1° - De nombreuses copies sautent le II 1° assez délicat. Parmi les autres, certaines prennent les $c_{p,q}$ pour des fonctions qu'elles dérivent hardiment. Ce n'est qu'exceptionnellement que Fubini est évoqué. Les valeurs de μ et θ_p pour $p \geqslant 0$ sont rarement exactes, celles de θ_p pour $p < 0$ figurent dans un très petit nombre de copies.

En partant de l'égalité $\iint_{\Pi} (a(x))^{p+1} y^{q+2} \mathrm{D} f(x,y)\, dx\, dy = 0$ et en procédant par intégrations par parties successives, on obtient une relation de récurrence entre les $c_{p,q}$ analogue à celle étudiée en I - 4° (avec $\theta_p = 1$), valable pour $p = -1$ et $p \geqslant 0$. Encore faut-il montrer soigneusement qu'à chaque intégration par parties le terme tout intégré est nul. Pour les termes du type $[a(x) f(xy)]_{x=-\infty}^{x=+\infty}$, cela résulte immédiatement du fait que f est nulle en dehors de K. Par contre, pour ceux du type $[y^q \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)]_{y=o}^{y=+\infty}$ ou $[y^q f(x,y)]_{y=o}^{y=+\infty}$, il est essentiel d'indiquer que dans le cas $q \geqslant 1$ leur nullité résulte non seulement de la nullité de f hors de K, mais aussi de ce que f et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont supposées bornées. De nombreux candidats pensent que K est un compact de Π (auquel cas la condition que f soit nulle hors de K suffirait). Cette même erreur conduit ces candidats à approximer uniformément sur K la fonction f par une suite de polynômes. Il faut, en utilisant le théorème de Stone-Weierstrass, montrer que l'ensemble $\mathcal{A}$ des combinaisons linéaires des fonctions $(a(x))^p y^q$ permet d'approximer uniformément sur K n'importe quelle fonction continue φ sur $\mathbb{R}^2$ (ne pas omettre à ce propos que $\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$) ; ceci fait et compte tenu de ce que f est bornée sur K, on en déduit $\iint_{\Pi} f(x,y)\ \varphi(x,y)\, dx,\, dy = 0$. Montrer alors que f est nulle fait appel à un raisonnement bien classique.

Pour en terminer avec cette question, signalons qu'il convient aussi de poser $\theta_p = 1$ pour $p \neq -2$ et $\theta_{-2} = 0$, pour obtenir une relation de récurrence entre les $c_{p,q}$ valable dans tous les cas. Disons aussi qu'un nombre, hélas non négligeable de copies affirme que la nullité de $\iint_{\Pi} f(x,y)\, dx\, dy$ entraîne celle de f !!

2° - Il faut lire dans l'énoncé que ω et Ω sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$ et non de $\mathbb{R}_2$; la suite du problème rend d'ailleurs claire la nécessité de cette modification. Néanmoins le jury s'est montré très large sur cette question assez intuitive, mais tout de même assez longue à rédiger rigoureusement.

La partie b) révèle que beaucoup de candidats ne savent pas que, pour prouver la différentiabilité d'une fonction sur un ouvert U, il suffit de prouver sa différentiabilité sur deux ouverts dont la réunion est U. Quant à la partie c), elle recèle de nombreuses erreurs dans le calcul de $\tilde{\mathrm{D}}$ et met en lumière les ravages que peut causer un formalisme excessif. Ainsi de nombreux candidats ne bénéficient pas des points que devrait leur valoir une question aussi simple.

3° et 4° - Il suffit de montrer qu'on peut toujours se ramener, en vertu de la question précédente, à l'étude de l'opérateur D étudié au 1° et en particulier qu'il est toujours possible de faire en sorte que le degré de $\alpha a(x) - 2bx - 2b\beta$ soit effectivement égal à 1.

Partie III

Elle réclame l'application de théorème précis sur les séries de fonctions holomorphes et différentiables. Dans bien des cas, l'équation différentielle est résolue formellement sans qu'on se pose des questions sur le logarithme complexe ainsi introduit.

1° - La plupart des candidats ayant abordé cette question ont rectifié l'erreur d'impression figurant dans l'énoncé. La partie b) montre que le théorème permettant la dérivation terme à terme d'une série est trop souvent ignoré au moment où il conviendrait de l'utiliser (dans le cas présent, pour dériver par rapport à x_3).

Peut-être effrayés par l'étude d'une série de terme général exp. $(- n\rho\alpha + \beta\sqrt{n})$, où on a $\rho\alpha > 0$, des candidats ne craignent pas d'introduire, comme domaine de définition de la série ΣU_n, un demi-espace... dépendant de n !!

La question c) se ramène à l'étude d'une série géométrique en se restreignant au cas $x_3 = c$ ce que n'a vu aucun candidat, et les démonstrations sont fausses dans un grand nombre de copies.

2° - Cette question n'est pratiquement pas abordée. Le cas où la frontière de Π_1 est parallèle à $\mathbb{R}_3$, se ramène immédiatement à l'étude faite en 1° c), après un choix convenable de θ. Lorsque cette frontière est parallèle à $\mathbb{R}_1$, on est ramené à prouver que $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-|x_3-c|\sqrt{n}}$ tend vers $+\infty$ lorsque $|x_3 - c|$ tend vers 0.

Partie IV

1° - La question a), assez simple, est souvent menée à bien par les candidats l'ayant abordée. Sa résolution dépend du théorème bien classique «du prolongement analytique» parfois mal connu ou mal appliqué.

Il n'en est pas de même de la partie b) qui nécessite l'utilisation du résultat prouvé en II 4°.

2° - L'aspect géométrique de cette question retient l'attention d'un certain nombre de candidats et les démonstrations proposées sont variées et intéressantes ; le résultat demandé est par ailleurs bien classique.

3° - Pour prouver l'injectivité de l'application $u \to \tilde{u}$, on peut utiliser la question précédente ou plus simplement prouver qu'est non vide l'intérieur Ω_0 de l'ensemble des points de Ω où s'annule u et que u est nulle sur tout cube ouvert Γ contenu dans Ω et contenant un cube ouvert Γ_0 sur lequel u s'annule.

Enfin, pour montrer que $u \to \tilde{u}$ n'est pas surjective, il convient de prouver l'existence de solutions non bornées au voisinage d'un demi-plan, en utilisant les résultats démontrés en III 2°.

Répartition des notes

Agrégation masculine : 979 copies

n = 0	0<n≤4	5≤n≤9	10≤n≤14	15≤n≤19	20≤n≤24	25≤n≤29	30≤n≤34	35≤n≤39	40≤n≤44	45≤n≤49	50≤n
72	117	104	163	162	115	90	55	34	30	21	16

Agrégation féminine : 612 copies

n = 0	1≤n≤4	5≤n≤9	10≤n≤14	15≤n≤19	20≤n≤24	25≤n≤29	30≤n≤34	35≤n≤39	40≤n≤44	45≤n≤49	50≤n
62	117	106	101	85	54	34	21	16	6	5	5