EPREUVES ECRITES

MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

PRÉAMBULE

On rappelle qu'une droite D du plan projectif complexe Π est tangente à une conique propre C de ce plan si elle ne rencontre C qu'en un point. On dira que D est tangente à une conique dégénérée en deux droites distinctes si elle passe par le point commun à ces deux droites. On ne parlera pas de tangente à une conique dégénérée en deux droites confondues. Si A et A′ sont des points d'une conique propre, on désignera par AA′ soit la droite joignant A et A′ si ces points sont distincts, soit la tangente (unique) en A à la conique si ces points sont confondus.

Étant donné deux coniques propres Ω et C distinctes, on appelle ligne polygonale de Poncelet (en abrégé : ligne $\mathfrak{P}$) inscrite dans Ω et circonscrite à C toute suite infinie $n \longmapsto A_n$, n étant un élément de $\mathbf{Z}$ et A_n un point de Ω, telle que les droites $A_n A_{n+1}$ et $A_n A_{n-1}$ soient les deux tangentes à C, distinctes ou confondues, issues de A_n. On dira que les points A_n sont les sommets de la ligne $\mathfrak{P}$ et que A_n et A_{n+1} sont deux sommets consécutifs, qui d'ailleurs peuvent être confondus. Une ligne $\mathfrak{P}$ est un polygone de Poncelet à s sommets s'il existe un entier s, supérieur ou égal à 3, tel que l'on ait, pour tout n ($n \in \mathbf{Z}$), $A_{n+s} = A_n$, s sommets consécutifs étant distincts.

L'objet du problème est l'étude de telles lignes polygonales, la partie I étudiant directement, et indépendamment les uns des autres, des choix particuliers de Ω et C.

Les lettres X, Y, T désignent les coordonnées d'un point M de Π dans un repère projectif $\mathcal{R}$ qui est soit fixé à l'avance, soit à choisir convenablement en fonction de certaines conditions. On note Φ un faisceau linéaire ponctuel de coniques contenant Ω.

I

A. 1° Démontrer que, si Φ contient une conique dégénérée en deux droites confondues, un choix convenable de $\mathcal{R}$ permet de donner :

— à cette conique dégénérée l'équation $T^2 = 0$

— et à Ω soit l'équation $Y^2 - 2XT = 0$ (premier cas), soit l'équation $X^2 + Y^2 - T^2 = 0$ (deuxième cas), ces deux cas s'excluant mutuellement.

2° Démontrer que dans le premier cas, si C est une conique propre de Φ, il n'existe aucun polygone de Poncelet inscrit dans Ω et circonscrit à C.

3° Le repère $\mathcal{R}$ étant fixé, on prend pour Ω la conique d'équation $X^2 + Y^2 - T^2 = 0$ et pour C la conique C_λ d'équation $X^2 + Y^2 - \lambda T^2 = 0$, λ étant un nombre complexe différent de 0 et de 1.

a. Comment faut-il choisir λ pour qu'il existe au moins un polygone de Poncelet inscrit dans Ω et circonscrit à C_λ?

Le nombre entier s étant donné supérieur ou égal à 3, pour combien de valeurs distinctes de λ existe-t-il un polygone de Poncelet à s sommets inscrit dans Ω et circonscrit à C_λ?

b. Déduire de ce qui précède que, si les coniques Ω et C sont définies dans un repère quelconque par des formes quadratiques à coefficients réels et sont tangentes en deux points distincts à coordonnées réelles, un polygone de Poncelet inscrit dans Ω et circonscrit à C, s'il en existe, a au plus deux sommets à coordonnées réelles.

B. Le repère $\mathcal{R}$ est fixé; J est le point (1, 0, 0). On prend pour Ω la conique d'équation $Y^2 - 2XT = 0$ et pour C la conique C_λ d'équation $Y^2 - 2XT + \lambda YT = 0$, λ n'étant pas nul. Quel que soit λ, C_λ et Ω appartiennent à un faisceau linéaire ponctuel Φ.

1° Une représentation paramétrique rationnelle propre de $\overline{\Omega} = \Omega \setminus \{J\}$ (Ω privée du point J) est $t \longmapsto A$, les coordonnées de A étant

$$X = \frac{1}{2}t^2 \quad , \quad Y = t \quad , \quad T = 1.$$

Établir une condition $\theta(\lambda, t, t') = 0$ nécessaire et suffisante pour que la droite AA′ définie par les points de $\overline{\Omega}$ de paramètres respectifs t et t' soit tangente à C_λ.

2° *a.* On suppose $t(\lambda - 4t) \neq 0$. Établir que par le point A de paramètre t passent deux tangentes à C_λ qui recoupent $\overline{\Omega}$ en des points $A'(t')$ et $A''(t'')$, les trois paramètres t, t' et t'' étant distincts.

Calculer $\frac{t'}{\lambda}$ et $\frac{t''}{\lambda}$ en fonction de $\frac{t}{\lambda}$.

b. Démontrer que, si $\frac{4t_0}{\lambda}$ n'est pas le carré d'un entier, le point A_0 de paramètre t_0 est sommet d'une ligne $\mathfrak{L}$ de sommets distincts, inscrite dans Ω et circonscrite à C_λ.

c. Que se passe-t-il lorsque $\frac{4t_0}{\lambda}$ est le carré d'un entier?

3° On suppose $t(\lambda - 4t) \neq 0$. Établir que par le point $A(t)$ passe au moins une tangente à la conique propre C_ν du faisceau Φ ($\nu \neq \lambda$) coupant $\overline{\Omega}$ en B de paramètre u différent de t.

On pose : $\nu = \lambda\rho^2, \quad \lambda' = \lambda(\rho - 1)^2, \quad \lambda'' = \lambda(\rho + 1)^2.$

Démontrer que des deux droites BA′ et BA″ l'une est tangente à la conique $C_{\lambda'}$, et l'autre à la conique $C_{\lambda''}$.

4° Établir que, pour λ et k fixés ($k \in \mathbf{Z}$) et pour une ligne $\mathfrak{L}$ quelconque inscrite dans Ω et circonscrite à C_λ, les droites $A_n A_{n+k}$ sont, quel que soit n ($n \in \mathbf{Z}$), tangentes à une même conique de Φ que l'on précisera.

5° Existe-t-il des polygones de Poncelet inscrits dans Ω et circonscrits à C_λ?

II

La conique propre Ω et le faisceau Φ resteront fixes dans la partie II, Φ ne contenant pas de conique dégénérée en deux droites confondues. On note λ un nombre complexe quelconque.

Soit C une autre conique propre de Φ, S (resp. N) la matrice symétrique d'une forme quadratique dont l'annulation définit Ω (resp. C) dans un repère $\mathcal{R}$.

On note :

$d(\lambda)$ ou det $(\mathrm{N} - \lambda\,\mathrm{S})$ le déterminant de la matrice $\mathrm{N} - \lambda\mathrm{S}$;

C_λ la conique d'équation $\det\left[(\mathrm{X\ Y\ T})\ (\mathrm{N} - \lambda\mathrm{S}) \begin{pmatrix} \mathrm{X} \\ \mathrm{Y} \\ \mathrm{T} \end{pmatrix}\right] = 0$;

Γ la cubique, dite de Cayley, d'équation $\mu^2 = d(\lambda)$ dans le plan affine complexe P rapporté à un repère fixe, où λ et μ sont les coordonnées d'un point.

Dans une complétion projective $\widehat{\mathrm{P}}$ de P, où ω est le point à l'infini de l'axe des μ, on considère $\widehat{\Gamma} = \Gamma \cup \{\omega\}$.

1° La cubique $\widehat{\Gamma}$ dépend, pour Ω et C fixées, du choix de $\mathcal{R}$, S et N. Comment se transforme-t-elle si on change $\mathcal{R}$, ou S, ou N? Établir que le nombre de ses points doubles ne dépend que de Φ. A quelle condition doit satisfaire Φ pour que $\widehat{\Gamma}$ soit sans point double?

Jusqu'à la question II, 6° incluse la cubique $\widehat{\Gamma}$ *est supposée sans point double*. Toute droite de $\widehat{\mathrm{P}}$ rencontre donc $\widehat{\Gamma}$ en trois points distincts ou non.

2° Si m et m' sont des points de $\widehat{\Gamma}$, mm' désigne soit la droite joignant m et m' si ces points sont distincts, soit la tangente (unique) en m à $\widehat{\Gamma}$ si ces points sont confondus. La droite mm' recoupe $\widehat{\Gamma}$ en un point m''. Au couple (m, m') on associe le point, noté $m + m'$, où la droite $\omega m''$ recoupe $\widehat{\Gamma}$.

En admettant sans démonstration qu'elle est associative, établir que la loi de composition interne ainsi définie munit $\widehat{\Gamma}$ d'une structure de groupe commutatif (ce qui justifie pour cette loi la notation additive).

Montrer que, Ω et C étant fixées, les groupes $(\widehat{\Gamma}, +)$ correspondant aux différents choix de $\mathcal{R}$, S et N sont deux à deux isomorphes.

3° *a*. Montrer qu'un choix convenable du repère et des formes quadratiques définissant Ω et C permet de supposer :

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & -1 \\ \beta & \gamma & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad \mathrm{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbf{C}^3,\ \det \mathrm{N} \neq 0.$$

La cubique $\widehat{\Gamma}$ est alors fixée.

On désigne par f l'application de $\widehat{\Gamma}$ dans Φ définie par :

$f(m) = \Omega$ pour $m = \omega$,

$f(m) = C_\lambda$ pour m point d'abscisse λ de Γ.

Le point I (0, 0, 1) est un point de base de Φ. Chaque conique $f(m)$ possède en I une tangente bien déterminée, qui coupe Ω en I et en un point $g(m)$ éventuellement confondu avec I.

b. Soit λ_1, λ_2, et λ_3 trois nombres complexes. Établir une condition $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ nécessaire et suffisante pour que ces trois nombres soient les abscisses de trois points m_1, m_2 et m_3 de Γ vérifiant la relation $m_1 + m_2 + m_3 = \omega$.

c. Démontrer que, si m_1, m_2 et m_3 sont trois points de $\widehat{\Gamma}$ vérifiant la relation $m_1 + m_2 + m_3 = \omega$, alors la droite $g(m_1)g(m_2)$ est tangente à la conique $f(m_3)$.

4° Soit c l'un des points de Γ dont l'image par f est C. Démontrer que les deux tangentes à C menées par le point $g(m)$ de Ω sont les deux droites $g(m)g(m + c)$ et $g(m)g(m - c)$.

5° On considère dans cette question les lignes $\mathfrak{L}$ inscrites dans Ω et circonscrites à C.

a. Établir que, s'il existe une ligne $\mathfrak{L}$ périodique de plus petite période strictement positive *s*, alors toute ligne $\mathfrak{L}$ est périodique de plus petite période strictement positive *s*. Ces lignes sont-elles des polygones de Poncelet? Que se passe-t-il, selon la parité de *s*, pour une ligne $\mathfrak{L}$ périodique admettant pour sommet un point de base de Φ ou un point de contact d'une tangente commune à Ω et C?

b. Dans le cas où il n'existe aucune ligne $\mathfrak{L}$ périodique, démontrer que les sommets d'une ligne $\mathfrak{L}$ sont distincts, sauf dans certains cas que l'on précisera.

c. Démontrer que, pour un entier *k* fixé et pour toute ligne $\mathfrak{L}$, les droites $A_n A_{n+k}$ sont, quel que soit n ($n \in \mathbf{Z}$), tangentes à une même conique de Φ que l'on précisera.

6° *a.* Dans le faisceau Φ existe-t-il des coniques C_λ dont trois tangentes forment un triangle inscrit dans Ω?

En se plaçant dans les hypothèses du II, 3°, *a*, établir une condition, portant sur α, β et γ, d'existence de lignes $\mathfrak{L}$ de période 3 inscrites dans Ω et circonscrites à C.

b. Dans le faisceau Φ existe-t-il des coniques C_λ dont quatre tangentes forment un quadrangle inscrit dans Ω?

En se plaçant dans les hypothèses du II, 3°, *a*, établir une condition, portant sur α, β et γ, d'existence de lignes $\mathfrak{L}$ de période 4 inscrites dans Ω et circonscrites à C.

7° *On suppose dans cette question que la cubique $\hat{\Gamma}$ a un point double.*

Démontrer que dans ce cas il n'existe pas de droite de $\hat{P}$ incluse dans $\hat{\Gamma}$. Que deviennent les résultats des cinq questions précédentes?

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES GENERALES

Le texte est certainement long. Mais cette longueur s'explique en partie par le souci de présenter le sujet adopté de façon à ne pas faire de lui une énigme et à établir une progression lente de l'étude, qui sépare et gradue les difficultés en commençant par une application directe de définitions ou de propriétés fondamentales. Il veut s'adresser aux candidats capables d'aller de l'avant en s'appuyant sur une bonne assimilation des notions élémentaires et sur un raisonnement logique rigoureux et sûr.

Cependant l'examen des tableaux de répartition des notes attire l'attention sur le pourcentage anormalement élevé à ce niveau des copies extrêmement faibles. Sur 1 062 candidats et 655 candidates présents, 20,8 pour cent ont eu zéro, (copies blanches ou réduites à quelques phrases), 8 pour cent environ ont eu 1 ou 2, (ce qui signifie quelques résultats extrêmement simples du type : distinction entre différentes formes de faisceaux, établissement d'une condition de contact, etc.). Même en écartant ces copies, la moyenne reste insuffisante malgré un barème généreux, tenant largement compte de la longueur de l'énoncé. La médiocrité est telle que, pour être classé parmi les candidats honorables, il suffit d'établir en la discutant la condition de contact entre AA' et C_λ (I - B, 1° d 2° a) et traiter la mise en équation réduite d'un faisceau de coniques (I - A, 1°) ou la transformation de $\hat{\Gamma}$ par changement de $\mathcal{R}$, $\mathcal{S}$, N (deux premières lignes de II 1°).

Aussi les correcteurs de cette épreuve sont-ils en droit de déplorer, comme déjà en 1972 d'ailleurs :

- l'ignorance par la majorité des candidats des premières notions de géométrie projective ou des faisceaux de coniques, bien que le programme comporte explicitement : espaces projectifs, coordonnées homogènes, faisceaux linéaires de coniques ;

- la maladresse et l'incorrection des méthodes - même si le résultat est parfois exact - et un mépris trop fréquent des enchaînements logiques ;
- la mauvaise qualité de la rédaction, la négligence de la présentation matérielle de trop nombreuses copies, l'imprécision ou même l'incorrection du langage, les fautes d'orthographe ou de français, d'étonnantes faiblesses de calcul (par exemple équation de AA' non symétrique en t et t').

Devant la médiocrité de tels brouillons, qui pose un problème inquiétant sur le plan professionnel - les candidats sont ou seront-ils plus exigeants pour leurs élèves que pour eux-mêmes ? - les examinateurs ont le devoir d'être sévères et en contre-partie ils n'hésitent pas à récompenser un travail précis, rédigé clairement et présenté avec soin.

Est-il encore nécessaire à ce niveau de conseiller aux candidats :

- de garder leur sang-froid et de ne pas foncer trop vite en négligeant d'assurer solidement leurs bases, dans l'intention louable, mais trop souvent déçue, d'aller très loin ;
- de **lire** l'énoncé avec attention, d'une part pour se placer bien dans le cadre fixé par le problème (ici, celui de la géométrie projective), d'autre part pour tirer convenablement parti des indications données.

Faut-il leur rappeler aussi qu'un texte d'examen est normalement un plan de travail progressif et qu'une mise au point précise, une discussion minutieuse, puis une rédaction claire de la solution d'une question facilitent grandement son application dans la suite de l'étude.

Partie I

Les correcteurs ont naturellement accepté le recours à des modèles affines à condition que des justifications suffisantes soient fournies. Mais, en utilisant des notions métriques (paraboles, cercles, axes de symétrie, foyers...) ou en se limitant sans raison apparente à des éléments réels (condition $\lambda < 1$, ou, sans que l'on sache pourquoi $|\lambda| < 1$), trop de candidats donnent l'impression de n'avoir pas réalisé vraiment la situation que leur présente le texte.

La question I - A, 1° demande de déterminer un repère bien adapté à l'étude de la figure formée par une conique propre et une droite, suivant le nombre de leurs points communs. Elle est correctement traitée dans une faible partie seulement des copies (15 % chez les candidates). Outre des idées fausses sur les faisceaux linéaires, beaucoup d'imprécisions apparaissent sur la définition même d'un repère ; une simple affirmation, à l'aide de «on peut», est suspecte lorsqu'elle n'est pas accompagnée d'une preuve et il est bien plus clair de placer avec précision tel ou tel sommet du repère. Quant au «point unitaire», dont l'introduction pouvait d'ailleurs être remplacée par des changements simples sur les vecteurs de base, il est rarement choisi avec netteté.

La rédaction des questions I-A, 2° et I-A, 3° peut être facilitée par l'utilisation d'un paramétrage des droites ou des coniques, tel que celui donné en B-1° par exemple.

La partie B est assez largement traitée. Mais que de maladresses à propos de calculs qui devraient être triviaux ; établir l'équation d'une droite en géométrie projective (des formules non homogènes sont données), discuter le nombre des tangentes (lié souvent au «signe de Δ»), reconnaître que tel nombre est solution de telle équation soulèvent, semble-t-il, des difficultés insoupçonnées ! Dans B-1°, la recherche de la condition $\theta(\lambda, t, t') = 0$ est souvent faite par des méthodes excluant l'égalité de t et t' , sans que ce dernier cas soit étudié, et le caractère nécessaire et suffisant de cette relation n'est pas mis en évidence ; beaucoup de candidats paraissent à ce sujet ne pas savoir qu'une conique propre est unicursale ou possède des équations tangentielles.

Dans B, 2° et B, 3°, l'hypothèse $t(\lambda - 4t) \neq 0$ est rarement comprise et les calculs demandés sont le plus souvent maladroits, voire malhonnêtes (l'emploi du symbole $\sqrt{}$ portant sur une variable complexe rend particulièrement douteuses certaines vérifications portant sur des sommes de radicaux).

Quand elle est abordée, la question B, 4° est correctement traitée ; elle permet de résoudre B, 5°.

Partie II

Une matrice d'application linéaire et une matrice de forme bilinéaire ne se transforment pas de la même façon par changement de base ; ceci ne saurait être ignoré.

Dans 2°, la justification rigoureuse de l'isomorphisme des groupes $(\widehat{\Gamma}, +)$ doit faire appel à l'invariance du point ω.

Dans 3°, le choix du repère est lié à l'existence d'un point I commun à Ω et C, où les tangentes à ces deux coniques sont distinctes; la condition $\Delta(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 0$ est très rarement obtenue.

Pour les questions suivantes, les candidats ont le plus souvent fourni des affirmations, plutôt que des justifications rigoureuses.

Au 7°, signalons que la cubique $\widehat{\Gamma}$ est unicursale, et qu'une structure de groupe analogue à celle du 2° peut être établie sur $\widehat{\Gamma}$ privée de son point double.

Pour terminer, citons quelques fautes relevées sur les copies, qu'explique certes l'affolement des candidats, mais que les correcteurs souhaiteraient tout de même ne pas trouver au niveau du concours d'agrégation :

- une équation de conique dans le plan projectif contenant dix coefficients : $AX^2 + \ldots + 2\,BYT + \ldots + 2CX + 2C'Y + 2C''T + D = 0$;
- une équation du second degré ayant quatre solutions explicitées ;
- un nombre complexe admettant une infinité de racines carrées ;
- un groupe infini où tout élément admet pour symétrique l'élément neutre ;
- on peut toujours, connaissant 2α, trouver un entier s tel que $2s\alpha$ soit multiple de 2π ;
- toutes les coniques d'un faisceau ont même genre ;
- « il est impossible de trouver deux points A_1, A_2 de Ω tels que $A_1 A_2$ soit tangente à C, car on arrive à une équation analogue à l'inégalité de Schwarz, ce qui donne $A_1 = A_2$ (la copie ne contient pas d'autre explication) » ;
- « pour que la conique dégénérée ait pour équation $T^2 = 0$, il suffit de choisir le plan des deux droites qui la composent pour plan OX, OY ; et Ω a l'équation $Y^2 = 2XT$ ou $X^2 + Y^2 = T^2$, il suffit pour cela de choisir les deux droites de la conique décomposée pour axes de Ω ».

Répartition des notes

Agrégation masculine : 1 062 copies

n = 0	0<n⩽4	4<n⩽8	8<n⩽12	12<n⩽16	16<n⩽20	20<n⩽24	24<n⩽28	28<n⩽32	32<n
20,8 %	16,3 %	19,5 %	13,0 %	9,6 %	8,1 %	5,8 %	2,3 %	2,3 %	2,3%

Agrégation féminine : 655 copies

n = 0	0<n⩽5	5<n⩽10	10<n⩽15	15<n⩽20	20<n⩽25	25<n⩽30	30<n⩽35	35<n⩽40	40<n⩽45	45<n
136	95	98	91	93	67	33	23	7	7	5