MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

DIRECTION CHARGÉE DES PERSONNELS ENSEIGNANTS

Agrégation Mathématiques

1971

Rapport de M. POUGNAND, Inspecteur général de l'Instruction publique,
Président des jurys

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHE ET DE DOCUMENTATION PÉDAGOGIQUES
Service d'Édition et de Vente des Publications de l'Éducation Nationale

AGREGATION DE MATHEMATIQUES

Session de 1971

Composition des Jurys :

AGREGATION - FEMMES

M. POUGNAND, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Président*

Mme BLANCHETON, *Professeur à l'Université de Caen, Vice-Présidente*

M. BAILLE, *Maître-Assistant à l'Université de Grenoble*

M. BERROIR, *Professeur à l'Université Paris VI*

M. BOURSIN, *Directeur de l'I.U.T. d'Orléans*

Mlle CALAIS, *Maître de Conférences à l'Université de Reims*

M. CEA, *Professeur à l'Université de Nice*

M. COEURE, *Professeur à l'Université de Nancy*

M. HOUZEL, *Professeur à l'Université de Nice*

M. LETAC, *Professeur à l'I.U.T. de Clermont-Ferrand*

M. ARNAUDIES, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Kléber de Strasbourg*

M. BOUSQUET, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Pasteur de Neuilly*

M. ODOUX, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Champollion de Grenoble*

M. RAMIS, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Louis-le-Grand de Paris*

AGREGATION - HOMMES

M. POUGNAND, *Inspecteur général de l'Instruction publique, Président*

M. COMBES, *Professeur à l'Université Paris VI, Vice-Président*

M. MALLIAVIN, *Professeur à l'Université Paris VI, Vice-Président*

M. BOCLE, *Professeur à l'Université de Brest*

M. BOUTET de MONVEL, *Professeur à l'Université de Nice*

M. CAPODANNO, *Professeur à l'Université de Besançon*

M. DEHEUVELS, *Professeur à l'Université Paris VI*

M. GASTINEL, *Professeur à l'Université de Grenoble*

M. GEORGE, *Professeur à l'Université de Nancy*

M. LEBORGNE, *Professeur à l'Université de Nantes*

Mme MALLIAVIN, *Professeur à l'Université Paris VI*

M. MARTINEAU, *Professeur à l'Université de Nice*

M. NEVEU, *Professeur à l'Université Paris VII*

M. QUERRE, *Professeur à l'Université de Brest*

M. CRESTEY, *Professeur de Mathématiques Supérieures au Lycée Saint-Louis de Paris*

M. CUENAT, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Hoche de Versailles*

M. DABLANC, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Hoche de Versailles*

M. FLORY, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Chaptal de Paris*

M. FRABOUL, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée Clémenceau de Nantes*

M. PERONNY, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée B. Pascal de Clermont-Ferrand*

M. TULOUP, *Professeur de Mathématiques Spéciales au Lycée du Parc de Lyon*

LE DEROULEMENT DU CONCOURS 1971

EPREUVES PREPARATOIRES (écrit)

Les épreuves préparatoires ont eu lieu aux dates suivantes :

Composition de Mathématiques Générales	:	lundi 10 mai de 8 heures à 14 heures
Composition d'Analyse	:	mardi 11 mai de 8 heures à 14 heures
Composition de Mathématiques Appliquées	:	jeudi 13 mai de 8 heures à 14 heures

La composition de mathématiques appliquées comprenait trois options : analyse numérique, mécanique, probabilités, les candidats ayant été invités à préciser à l'avance l'option de leur choix.

Les listes d'admissibilité ont été affichées au Ministère de l'Education Nationale et au Lycée Saint-Louis à Paris :
- le mercredi 16 juin vers 12 heures pour l'Agrégation féminine ;
- le lundi 21 juin vers 12 heures pour l'Agrégation masculine.

Le jour de l'affichage ont été envoyés :
- les convocations pour l'oral des admissibles avec pour chacun une copie des Instructions officielles concernant l'organisation de l'oral et une liste des ouvrages de la Bibliothèque de l'Agrégation ;
- les relevés des notes des candidats malheureux à l'écrit.

EPREUVES DEFINITIVES (oral)

Elles se sont déroulées à Paris
- au Lycée Saint-Louis et à partir du samedi 19 juin pour l'Agrégation féminine ;
- au Lycée Jean de La Fontaine et à partir du lundi 28 juin pour l'Agrégation masculine.

Les résultats définitifs (liste d'admission à l'Agrégation, listes des équivalences accordées des épreuves théoriques du C.A.P.E.S. ou du C.A.P.E.S. complet) ont été affichés pour les deux Agrégations le lundi 26 juillet vers 11 heures au Ministère de l'Education Nationale, au Lycée Saint-Louis et au Lycée Jean de La Fontaine. Le même jour ont été expédiés les relevés des notes de tous les candidats admissibles, admis définitivement ou non.

STATISTIQUES DIVERSES

RESULTATS NUMERIQUES			Candidats	Candidates
	Nombre de postes mis au concours	:	170	134
(1)	Candidats inscrits	:	975 + 14*	614 + 3*
	Candidats présents à la 1re épreuve	:	835	525
	Candidats ayant terminé l'écrit	:	732	473
(1)	Candidats déclarés admissibles	:	266	186 + 2*
	Candidats admis à l'Agrégation	:	146	102 + 1*
	Equivalences accordées des épreuves théoriques du CAPES	:	0	0
	Equivalences accordées du CAPES complet	:	7	6

Le pourcentage des abstentions totales se monte à 15 % dans les deux cas. Relativement aux concours de 1970, le nombre des inscriptions a augmenté de 177 pour les hommes, de 66 pour les femmes, soit de 18 % et de 12 % ?

---

(1) L'astérisque * désigne les candidats étrangers.

REPARTITION DES CANDIDATS ENTRE LES TROIS OPTIONS

	Analyse numérique		Mécanique		Probabilités	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Ont composé	235	182	223	113	274	178
Admissibles	92 (24)	84 (21)	79 (1)	39 (3)	95 (31)	65 (22)
Admis	56 (21)	51 (17)	32 (1)	15 (2)	58 (25)	37 (20)

(Entre parenthèses est indiqué le nombre des candidats appartenant aux Grandes Ecoles)

STATISTIQUE SUR LES ADMISSIBLES QUI ONT PRESENTE DES CONCOURS ANTERIEURS

	Présentés		Admis	
	Hommes	Femmes	Hommes	Femmes
Non déjà admissibles	33	31	6	11
Admissibles une fois	51	38	28	22
Bi-admissibles	6	9	3	3

SITUATION UNIVERSITAIRE DES CANDIDATS

En séparant les candidats ou candidates en 11 groupes désignés par les abréviations suivantes :

U ou S : Elèves de l'E.N.S. Ulm ou de l'E.N.S. Jourdan
C ou F : Elèves de l'E.N.S. St-Cloud ou de l'E.N.S. Fontenay
T : élèves de l'E.N.S.E.T.
A : Assistants de Facultés
P : Professeurs certifiés
C.O. : Professeurs ou assistants en congé ou au Service Militaire
C.P.R. : Professeurs-stagiaires des C.P.R.
I.P.E.S. : Elèves-professeurs des I.P.E.S.
E : Etudiants
D : Personnel autre que les certifiés, et enseignement privé
Et : Etrangers

on obtient les deux tableaux suivants :

HOMMES

	U	C	T	A	P	CO	CPR	IPES	E	D	Et.	
Inscrits	22	13	25	66	242	36	234	126	119	92	14	989
Ont composé	22	13	25	49	176	26	206	125	107	75	12	836
Admissibles	21	13	22	25	33	5	44	55	35	13	0	266
Admis	19	13	15	12	11	4	16	31	18	7	0	146

FEMMES

	S	F	T	A	P	CO	CPR	IPES	E	D	Et.	
Inscrites	22	27	3	15	124	11	215	88	75	34	3	617
Ont composé	22	26	3	12	76	10	194	85	71	24	3	526
Admissibles	22	23	1	6	19	1	52	31	29	2	2	188
Admises	20	19	0	3	8	1	18	20	13	0	1	103

REPARTITION DES CANDIDATS SUIVANT LES CENTRES

HOMMES

Candidats	AIX	AMIENS	BESANCON	BORDEAUX	CAEN	CLERMONT	DIJON	GRENOBLE	LILLE	LIMOGES	LYON	MONTPELLIER
Inscrits	40	15	18	35	17	15	32	51	122	11	62	41
Ont composé	34	14	16	31	17	14	27	42	107	9	54	36
Admissibles	6	1	3	14	4	5	3	14	26	1	6	9
Admis	1	0	1	8	0	0	2	7	12	0	2	3

HOMMES

Candidats	NANCY	NANTES	NICE	ORLEANS	PARIS	POITIERS	REIMS	RENNES	ROUEN	STRASBOURG	TOULOUSE	ETRANGER
Inscrits	23	8	13	14	234	23	17	38	25	50	33	52
Ont composé	20	2	8	11	207	20	14	31	20	44	23	35
Admissibles	7	0	0	6	113	6	1	5	8	10	6	12
Admis	4	0	0	2	81	1	1	2	3	9	3	4

FEMMES

Candidates	AIX	AMIENS	BESANCON	BORDEAUX	CAEN	CLERMONT	DIJON	GRENOBLE	LILLE	LIMOGES	LYON	MONTPELLIER
Inscrites	21	10	9	11	11	11	19	35	37	10	42	20
Ont composé	17	8	8	9	10	11	14	31	33	9	35	17
Admissibles	1	1	3	4	3	7	5	7	7	2	9	2
Admises	0	0	2	2	1	4	3	5	3	0	2	2

FEMMES

Candidates	NANCY	NANTES	NICE	ORLEANS	PARIS	POITIERS	REIMS	RENNES	ROUEN	STRASBOURG	TOULOUSE	ETRANGER
Inscrites	17	4	8	14	212	10	10	28	12	28	28	10
Ont composé	16	2	7	8	187	9	6	25	9	25	24	6
Admissibles	3	2	4	2	93	3	3	4	3	6	12	2
Admises	3	1	4	1	57	1	1	1	2	2	6	0

REPARTITION DES CANDIDATS D'APRES LEUR AGE (admissibles et admis)

Année de naissance	Candidats		Candidates	
	Admissibles	Admis	Admissibles	Admis
1950	3	3	1	1
1949	23	19	18	10
1948	61	40	59	35
1947	71	45	55	37
1946	34	12	35	12
1945	24	6	11	6
1944 et avant 1944	49	21	9	2

Pour l'admissibilité, 2 candidats sur 11 et 1 candidate sur 20 ont 27 ans ou plus. Pour l'admission 4 candidats ou candidates sur 5 ont 24 ans au plus tandis que 1 candidat sur 7 et 1 candidate sur 20 ont 27 ans au moins.

AFFECTATION DES NOUVEAUX AGREGES 1971

Bien que les affectations ne soient pas du ressort des Jurys d'Agrégation, les lecteurs voudront probablement savoir ce que sont devenus les nouveaux agrégés 1971.

Comme pour les années précédentes, satisfaction a été accordée à toutes les demandes formulées régulièrement par la Direction de l'Enseignement Supérieur dans les délais fixés administrativement, pratiquement avant la commission des premiers jours d'août.

Sur les 146 candidats et les 102 candidates français admis :

39 + 18 = 57 ont été autorisés à faire une année supplémentaire dans une E.N.S. ou à entrer au C.N.R.S
21 + 7 = 28 ont été maintenus ou détachés sur un poste d'assistant de Faculté ou d'I.U.T.
2 + 1 = 3 ont été détachés dans des Ecoles supérieures ou à l'I.N.R.D.P.
11 + 8 = 19 ont obtenu des chaires de Classes préparatoires
43 + 47 = 90 ont été nommés sur des chaires de T.C. ou T.E.
3 + 0 = 3 ont été maintenus sur leurs chaires de T.C. ou T.E.
5 + 2 = 7 ont été désignés pour des Ecoles Normales (2 en T.C.)
5 + 6 = 11 ont obtenu des chaires ordinaires de Lycées (raisons familiales)
14 + 6 = 20 sont partis pour l'étranger au titre de la Coopération
3 + 1 = 4 ont opté pour l'enseignement privé
0 + 3 = 3 ont obtenu des sursis d'intégration pour poursuivre des études particulières (dont deux boursières pour l'étranger)
0 + 3 = 3 suivront un stage de formation pédagogique.

146+102 = 248

Le faible nombre des agrégés inscrits au stage de formation pédagogique s'explique par le fait que après les mouvements consacrés au personnel titulaire et avant le mouvement d'août réservé en principe a agrégés et certifiés de l'année, 24 chaires de classes préparatoires, 188 de T.C. ou de T.E. (dont 5 n'ont finalement pas été ouvertes) et de nombreux postes dans les Ecoles Normales restaient vacants. Cinq de c classes préparatoires et 25 classes terminales ayant pu être données finalement à du personnel titulaire p ancien (en particulier de retour de l'Enseignement Supérieur ou du service militaire), il était nécessaire de faire appel aux jeunes agrégés et à 68 certifiés de l'année, qui se sont particulièrement distingués aux épreuves pratiques du C.A.P.E.S. ou du C.A.P.E.T. Ces chiffres montrent combien restent importants les besoins immédiats du Second Degré en personnel possédant une forte culture mathématique moderne.

QUELQUES REFLEXIONS GENERALES

Les rapports particuliers des correcteurs d'écrit et des examinateurs d'oral s'intéresseront plus volontiers à l'analyse technique des problèmes et à la critique des copies ou interrogations. Nous nous bornerons ici à faire une étude rapide des résultats obtenus tant à l'écrit qu'à l'oral et à présenter quelques remarques dont les futurs candidats sauront tirer profit au cours de leur préparation au concours.

Sur l'écrit

Pour les deux agrégations masculine et féminine, dont les sujets sont communs, la barre d'admissibilité a été fixée à 49, ce qui représente une moyenne très légèrement supérieure à 6.(sur 20). Les Jurys ont estimé ne pas pouvoir descendre plus bas : un niveau minimum dans les épreuves écrites leur paraît en effet une condition nécessaire de réussite pour des agrégés appelés à enseigner à un niveau déjà élevé. Certes les problèmes posés étaient comme toujours assez longs, ce qui présente l'avantage non seulement de permettre la construction de sujets intéressants portant sur une partie étendue du programme, mais aussi de donner l'occasion aux candidats de montrer toute la gamme de leurs possibilités. Bien entendu, selon la coutume, les barèmes en ont tenu compte ; établis en commun par les représentants des deux Jurys, ils ont conduit à un large étalement des notes. Les correcteurs n'hésitent pas à attribuer des notes très élevées à des copies même incomplètes,, dont les auteurs montrent de l'initiative et de la vivacité, une bonne sûreté de raisonnement et naturellement des connaissances pleines de promesses.

Le tableau suivant concerne les totaux (notes σ) obtenues à l'écrit, la première colonne étant relative à l'agrégation masculine, la seconde à l'agrégation féminine.

Total obtenu	Nombre de candidats	Nombre de candidates
$\sigma = 0$	46	23
$0 < \sigma \leq 8$	87	41
$8 < \sigma \leq 16$	84	34
$16 < \sigma \leq 24$	92	56
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$49 \leq \sigma \leq 56$	74	49
$56 < \sigma \leq 64$	54	43
$64 < \sigma \leq 72$	40	34
$72 < \sigma \leq 80$	26	17
$80 < \sigma \leq 88$	21	19
$88 < \sigma \leq 96$	12	7
$96 < \sigma \leq 112$	14	12
$112 < \sigma \leq 128$	10	6
$128 < \sigma$	15	1

On remarquera le pourcentage élevé des résultats vraiment faibles, traduisant des fautes graves ou des ignorances guère admissibles pour la plupart ; le quart environ des 835 candidats présents, un peu moins du cinquième des 525 candidates présentes ont obtenu une moyenne d'écrit inférieure ou égale à 2 et le nombre des 0 est vraiment désolant. La répartition des admissibles en fonction du σ est assez régulière dans les deux listes, les très bons candidats,obtenant plus de 16 sur 20,de moyenne étant nettement plus nombreux à l'agrégation masculine qu'à l'agrégation féminine.

Malgré les avertissements et les conseils donnés depuis de nombreuses années dans les rapports des concours, les correcteurs s'inquiètent de voir se dégrader encore la qualité de la rédaction et surtout le souci de rigueur, la précision du langage et peut-être des idées ; cela est particulièrement préoccupant pour de futurs enseignants. Ils constatent en particulier une désinvolture de plus en plus grande dans l'emploi de résultats prétendus bien connus, mais cités de façon inexacte, désinvolture contre laquelle ils sont tenus de réagir. Devrait-il paraître nécessaire de rappeler à ce niveau que l'utilisation d'un théorème ou d'une formu exige d'avoir au préalable vérifié soigneusement et de façon explicite que les conditions d'application sont remplies ? Devrait-il être nécessaire de demander ici que les théorèmes utilisés soient énoncés correctement écrire par exemple qu'une «homographie de $P_2(\mathbb{C})$ est déterminée par la donnée de 4 points et de leurs image est une faute grave, l'hypothèse «trois quelconques d'entre eux et trois quelconques des images ne sont pas alignés» étant essentielle. De même, parler d' «ensembles isomorphes» au lieu de «groupes isomorphes» est une négligence qui doit être évitée.

Une mise en garde semble aussi devoir être faite contre une tendance fréquente à traiter trop rapideme et de façon superficielle le début du problème dans l'espoir d'aborder le plus possible de questions. D'une part les correcteurs sont sensibles à une rédaction claire, bien présentée, où les conditions de départ sont bien précisées, les hypothèses introduites nettement et à la place voulue, où l'enchaînement des idées est b marqué. D'autre part les candidats, qui s'astreignent à vérifier à chaque pas que leur raisonnement est solide leur discussion complète, y acquièrent une force de pensée qui ne peut que favoriser leur pénétration des que tions ultérieures. De toute façon, les candidats qui ont fait un tel effort, en ont été récompensés.

Sur l'oral

Pour les deux agrégations la barre d'admission a été fixée à 128 sur 320 ce qui correspond à une moy générale égale à 8 sur 20. Seize candidats, une candidate avaient obtenu un total d'écrit leur assurant à lui seul le succès ; ils sont bien entendu restés parmi les mieux classés. Un bon oral a permis à quelques cand dats de remonter le handicap d'un écrit assez médiocre, comme le montrent les chiffres suivants :

	Admissibles		Admis	
	H	F	H	F
$\sigma = 49$	19	14	3	2
$\sigma = 50$	12	12	3	2
$\sigma = 51$	5	4	0	0
$\sigma = 52$	9	4	1	1

Les jurys regrettent certes de n'avoir pu pourvoir tous les postes mis au concours, mais ils gardent l'impression d'être encore allés à l'extrême limite de l'indulgence. Nombreux hélas ! sont les examinateurs qui croient déceler plutôt une baisse générale du niveau des candidats.

Les conseils et les instructions donnés dans les rapports précédents ou envoyés aux admissibles semblent avoir porté leurs fruits et la nouvelle formule de l'oral commence à être assimilée. Toutefois certaines commissions signalent encore le choix trop restreint, laissé au jury par certains candidats, de points importants pouvant donner lieu à un exposé ; deux ou trois théorèmes ou applications substantiels, aux démonstrations non immédiates, constituent le minimum exigible. Trop de candidats ne savent pas auss se placer pour leurs épreuves orales à un niveau raisonnable, soit parce qu'ils sont trop ambitieux - et les chutes qui en résultent risquent alors d'être sévères - soit parce que, se limitant dans leur étude à un niveau trop élémentaire, ils donnent l'impression de ne pas dominer le problème et se laissent surprendre par les questions que, en élevant le débat, le jury a le droit et le devoir de leur poser sur le sujet choisi. On ne d pas oublier que le programme officiel du Concours déborde en de nombreux points ceux des classes de l'Enseignement du Second Degré et des classes préparatoires.

L'énormité des lacunes et des erreurs commises met en cause assez souvent, semble-t-il, la prépa tion même de l'agrégation par le candidat. Le Jury se rend compte des difficultés qu'éprouvent de nombreu agrégatifs à s'entraîner aux épreuves orales, à cause notamment dans bien des cas de l'isolement ou des charges professionnelles ; il est obligé malgré tout d'exiger un niveau minimum. A ce sujet, il importe aus que les candidats comprennent bien :

- que le couplage des textes est effectué de façon à ne pas permettre une ignorance totale de toute une pa du programme (de toute la géométrie par exemple).
- qu'il n'est pas possible à un candidat «d'apprendre la leçon» pendant les trois heures accordées à sa pr paration, s'il n'a pas déjà réfléchi sur les thèmes qui lui sont proposés. Les sujets exigent normalement synthèse touchant plusieurs parties du programme parfois assez lointaines l'une de l'autre, qu'il est diffi

de découvrir le jour de l'épreuve. Une telle construction de plan, dégageant clairement l'articulation des idées de base et de leurs conséquences ou applications, nécessite une réflexion en profondeur et une longue maturation du programme. Elle ne peut être improvisée sans de gros risques et la solution qui consiste à reproduire servilement le plan d'un chapitre de manuel, en laissant de côté les interférences du sujet avec le reste du programme, ne répond nullement à la conception même de l'épreuve, telle qu'elle est développée sur les instructions officielles.

Cela nous amène à parler des documents fournis par la bibliothèque de l'agrégation. S'ils sont lus pour la première fois le jour de l'épreuve - et il semble malheureusement que ce soit souvent le cas - ces livres sont de faux amis. Comment croire sérieusement que l'on va apprendre en trois heures le théorème sur les polynômes symétriques ? Un livre ne peut être utile que si on le connaît déjà ou tout au moins si l'on a déjà des idées assez nettes sur le sujet à développer. Il constitue alors un garde-fou, peut remettre en mémoire une démonstration ou une formule et éviter les pertes de temps entraînées par un abus de mémorisation. Mais son utilité s'arrête là : que penser de telle candidate dont l'exposé à un certain moment est devenu incompréhensible tout bonnement parce qu'elle avait sauté quelques pages du livre emprunté ? Que dire aussi de ces candidats qui ne peuvent plus répondre aux questions dont la réponse n'est pas dans le livre, et qui, au lieu de faire l'effort de réflexion attendu, disent «Je ne sais pas» et attendent la suite.

Une certaine catégorie de candidats arrive au Concours la tête pleine de connaissances livresques. Si le niveau mathématique de l'agrégation s'est élevé et s'est rapproché de celui de l'Enseignement Supérieur pour assurer une meilleure vue d'ensemble des programmes du Secondaire, il ne faut pas perdre de vue le but qui reste le recrutement de professeurs. C'est dire que le jury apprécie toujours les qualités d'exposition, de clarté et de bon sens, le souci d'imager les théories ou de rendre accessibles les notions nouvelles par des applications et des exemples. Le jury constate souvent et regrette que trop d'exposés comportent beaucoup de définitions, introduites sans aucune motivation, et peu de théorèmes ; les applications et les exemples sont pauvres et de peu d'intérêt ; des théorèmes généraux sont énoncés ou établis, mais le candidat est gêné pour les traduire et les utiliser dans les situations les plus usuelles ; dans les démonstrations, le rôle des hypothèses n'est bien souvent pas mis en évidence avec assez de netteté et des contre-exemples devraient montrer ce qui se produit lorsque telle hypothèse est abandonnée ou modifiée. Enfin, dans l'exposé final, la présentation est fréquemment négligée ou incomplète. Même si la question posée lui paraît triviale, le candidat doit la traiter non avec la mentalité d'un élève cherchant simplement à justifier ses connaissances devant son maître, mais avec conviction et complètement, avec le souci du détail et de la clarté, en mettant l'accent sur les points importants ou délicats, comme le fait un professeur qui veut se faire comprendre de ses élèves. Se contenter de suggérer une démonstration ou les résultats d'une discussion, écrire en désordre sur le tableau, parler trop rapidement ou sur un ton uniforme en laissant les fins des phrases se perdre dans un bredouillage inaudible, ne pas avoir une aisance suffisante pour sortir de ses notes et regarder le jury de temps en temps est une attitude toujours sévèrement jugée à l'agrégation. Il semble qu'un effort soit encore à faire dans les préparations au concours, afin d'apprendre aux agrégatifs à avoir de la «présence », à sortir de leur état d'étudiants qui récitent, pour devenir des professeurs qui expliquent et exposent.

EPREUVES ECRITES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

L'objet du problème est l'étude de certains sous-groupes du groupe $PGL(2,\mathbf{C})$ des homographies du *plan projectif* $P_2(\mathbf{C})$ sur le corps $\mathbf{C}$ des nombres complexes. Pour toute partie E de $P_2(\mathbf{C})$, on notera $\mathcal{H}(E)$ le sous-groupe de $PGL(2,\mathbf{C})$ formé des homographies h laissant E globalement invariante, c'est-à-dire telles que l'on ait $h(E) = E$. Dans certaines questions, on utilisera la *droite projective complexe* $P_1(\mathbf{C})$.

Rappels. Une n-forme en trois indéterminées X,Y,T est un polynôme homogène F de $\mathbf{C}[X,Y,T]$ de degré $n \geqslant 1$. Un repère projectif de $P_2(\mathbf{C})$ étant choisi, l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des points M de $P_2(\mathbf{C})$ dont les coordonnées X,Y,T vérifient $F(X,Y,T) = 0$ est la *courbe algébrique attachée à* F; les éléments de $\mathcal{C}(F)$ sont les *points* de la forme; ainsi à une 1-forme est attachée une *droite,* à une 2-forme une *conique propre* ou la *réunion de deux droites...* Les courbes attachées à deux 2-formes F_1 et F_2 sont égales si, et seulement si, F_1 et F_2 sont proportionnelles.

Soit M_0 (X_0,Y_0,T_0) un point de $\mathcal{C}$ (F)et M_1 (X_1,Y_1,T_1) un point de $P_2(\mathbf{C})$ $(M_1 \neq M_0)$; en M_0 la droite de représentation $M = M_0 + \rho M_1$ rencontre $\mathcal{C}(F)$ à l'ordre k (ou : k fois) pour la forme F, si la valuation du polynôme $F(X_0 + \rho X_1, Y_0 + \rho Y_1, T_0 + \rho T_1)$ par rapport à ρ est égale à k $\big($par convention la valuation du polynôme nul est $+\infty\big)$. La droite $M = M_0 + \rho M_1$ est *tangente en* M_0 à $\mathcal{C}(F)$ si k est supérieur ou égal à 2 et s'il existe une droite rencontrant en M_0 la courbe $\mathcal{C}(F)$ à un ordre $l \leqslant k - 1$ $(1 \leqslant l < +\infty)$. *L'ordre* du point M_0 pour la forme F est le minimum de cette valuation quand M_1 varie; M_0 est *singulier* si son ordre est supérieur ou égal à 2 $\big($pour cela, il faut et il suffit que l'on ait $F'_X(M_0) = F'_Y(M_0) = F'_T(M_0) = 0\big)$. Dans le cas contraire M_0 est *simple.*

Enfin on admettra que, si les deux n-formes F_1 et F_2 sont *irréductibles,* la relation $\mathcal{C}(F_1) = \mathcal{C}(F_2)$ équivaut à l'existence d'un complexe t non nul tel que l'on ait : $F_1 = tF_2$. Il s'ensuit que, pour toute courbe algébrique $\Gamma = \mathcal{C}(F)$ attachée à une forme irréductible F et pour toute homographie $h \in PGL(2,\mathbf{C})$, on a : $h(\Gamma) = \Gamma$ si, et seulement si, il existe un complexe t non nul tel que l'on ait $F(X',Y',T') = tF(X,Y,T)$, où X,Y,T désignent les coordonnées d'un point M quelconque de $P_2(\mathbf{C})$ et (X',Y',T') celles de $M' = h(M)$.

On appelle *triangle* un ensemble de trois points non alignés de $P_2(\mathbf{C})$, et *côtés* de ce triangle les trois droites joignant deux à deux les trois points. On appelle *quadrangle* un ensemble de quatre points de $P_2(\mathbf{C})$ dont trois quelconques ne sont pas alignés, et *côtés* de ce quadrangle les six droites joignant deux à deux les quatre points; ces côtés se coupent deux à deux en sept points dont trois n'appartiennent pas au quadrangle et forment son *triangle diagonal.*

Dans toute la partie I on désigne par Q un quadrangle ABCD donné.

On conviendra de réserver l'appellation *conique* aux coniques *propres* et aux réunions de deux droites distinctes.

1° Montrer que le groupe $\mathcal{H}(Q)$ est isomorphe au groupe des permutations de Q. Dans la suite, on notera $\mathcal{A}(Q)$ le sous-groupe de $\mathcal{H}(Q)$ formé des homographies correspondant aux permutations paires de Q.

2° Dans $P_2(\mathbf{C})$ on choisit le repère $\mathcal{R}$ tel que Q soit l'ensemble des points $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-1,-1,1)$, $D(1,-1,1)$. On désigne par Φ le faisceau linéaire ponctuel des coniques attachées aux formes $\lambda_1(X^2 - T^2) + \lambda_2(T^2 - Y^2)$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes non simultanément nuls.

a. Démontrer qu'on peut définir une bijection θ de Φ sur $P_1(\mathbf{C})$ telle que la conique d'équation $\lambda_1(X^2 - Y^2) + \lambda_2(T^2 - Y^2) = 0$ corresponde, dans un repère convenable de $P_1(\mathbf{C})$, au point de coordonnées homogènes (λ_1,λ_2). Dans la suite on identifie Φ et $P_1(\mathbf{C})$ à l'aide de θ.

b. Pour toute conique K de Φ et pour toute homographie h de $\mathcal{H}(Q)$, la transformée $h(K)$ est une conique de Φ. Démontrer que, pour h fixée, l'application $\breve{h} : K \longmapsto h(K)$ est une homographie de $P_1(\mathbf{C})$.

L'application $h \longmapsto \breve{h}$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}(Q)$ dans le groupe $PGL(1,\mathbf{C})$ des homographies de $P_1(\mathbf{C})$; en déterminer avec précision l'image I_Q et le noyau (en appelant abscisse projective de N (λ_1,λ_2) le birapport $\rho = (\lambda_1,\lambda_2,0,\infty)$, on pourra définir toute homographie de $P_1(\mathbf{C})$ en exprimant en fonction de ρ l'abscisse projective ρ' de l'image N' de N).

c. Quels sont les points doubles des homographies éléments de I_Q? Montrer que les orbites des éléments de Φ sous $\mathcal{H}(Q)$ ont en général six éléments, que deux d'entre elles ont trois éléments, et que l'une d'entre elles a deux éléments. Représenter sur une même figure les orbites à trois éléments.

3° *a.* Démontrer que $\mathcal{H}(Q)$ est engendré par les homographies σ et τ correspondant aux permutations $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$. Représenter σ et τ par des matrices relativement au repère $\mathcal{R}$.

Démontrer que $\mathcal{A}(Q)$ est engendré par les homographies φ et ψ correspondant aux permutations $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$. Représenter φ et ψ par des matrices relativement à $\mathcal{R}$.

b. Montrer qu'il existe dans $P_2(\mathbf{C})$ une conique et une seule K(Q) laissée globalement invariante par toute homographie de $\mathcal{H}(Q)$. Quelles sont les polaires de A,B,C,D par rapport à K(Q)?

c. On se donne un ensemble Q^* de quatre droites de $P_2(\mathbf{C})$, dont trois quelconques ne sont pas concourantes. Déterminer le groupe des homographies qui laissent Q^* globalement invariant.

4° Le repère étant toujours $\mathcal{R}$, on s'intéresse ici à des courbes algébriques soit invariantes par toute homographie du groupe $\mathcal{H}(Q)$ (en abrégé par $\mathcal{H}(Q)$), soit invariantes par toute homographie du groupe $\mathcal{A}(Q)$ (par $\mathcal{A}(Q)$).

a. Établir qu'une courbe attachée à une 4-forme $H(X,Y,T)$ est invariante par $\mathcal{H}(Q)$ si, et seulement si, on a :

$$H(X,Y,T) = S(X^2,Y^2,T^2) \text{ où S est une 2-forme symétrique.}$$

b. Trouver les 4-formes dont les courbes attachées sont invariantes par $\mathcal{A}(Q)$.

II

On conserve toutes les notations précédentes; $P_2(\mathbf{C})$ est rapporté à $\mathcal{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on désigne par F_λ la 4-forme :

$$X^4 + Y^4 + T^4 + 2\lambda(Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2)$$

et par C_λ la courbe algébrique $\mathscr{C}(F_\lambda)$. On note F_∞ la forme :

$$Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2$$

et C_∞ la courbe $\mathscr{C}(F_\infty)$; F_∞ *et* C_∞ *n'interviennent que dans les questions* 1^o*a et* 6^o. Une 4-forme F_λ $\big($ou $F_\infty\big)$ et une droite L étant données, on dit que L est *tangente double* à la courbe C_λ attachée $\big($ou $C_\infty\big)$ si L la rencontre soit aux ordres 2 et 2 en deux points simples distincts, soit à l'ordre 4 en un point simple. Une telle tangente double est dite *ordinaire* dans le premier cas, *stationnaire* dans le deuxième. On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes doubles à certaines courbes C_λ.

1° *a.* Établir que F_∞ est irréductible et préciser ses points singuliers. Trouver une représentation paramétrique rationnelle propre de C_∞.

b. Vérifier que C_{-1} est la réunion de quatre droites. Pour quelles autres valeurs λ complexes la forme F_λ a-t-elle des points singuliers? Démontrer que pour ces valeurs F_λ n'est pas irréductible dans $\mathbf{C}[X,Y,T]$. Préciser les courbes C_λ correspondantes. On note Λ l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles F_λ est irréductible; *dans la suite, sauf au* 6^o, *on impose à* λ *d'appartenir à* Λ.

c. Établir que, pour $\lambda \in \Lambda$, les courbes C_λ admettent comme tangentes doubles fixes ordinaires les quatre droites de C_{-1} et que les points de contact ne dépendent pas de λ.

2° Déterminer les tangentes doubles à C_λ qui passent par les trois points :

(1) $\qquad$ (0,0,1) $\quad$ (0,1,0) $\quad$ (1,0,0)

Sont-elles ordinaires ou stationnaires?

3° On désigne par g l'application de $P_2(\mathbf{C})$ dans lui-même qui à tout point $M(X,Y,T)$ fait correspondre le point $g(M)$ de coordonnées (X^2,Y^2,T^2).

a. Démontrer que, si Γ est une courbe algébrique, $g^{-1}(\Gamma)$ est une courbe algébrique. Quelle est l'image par g d'une courbe C_λ?

b. On désigne par $\mathscr{T}$ la famille des coniques propres de $P_2(\mathbf{C})$ tangentes aux trois droites d'équations $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$. Démontrer que, si L est une droite de $P_2(\mathbf{C})$, g applique en général L sur une conique de la famille $\mathscr{T}$. Quels sont les cas d'exception? Quelle est l'image réciproque $g^{-1}(g(L))$?

c. Soit $F(X,Y,T)$ et $G(X,Y,T)$ deux formes de degrés quelconques, Γ et Δ les courbes attachées à ces formes. On désigne par Γ' et Δ' les courbes attachées aux formes $F(X^2,Y^2,T^2)$ et $G(X^2,Y^2,T^2)$, par $M_0(X_0,Y_0,T_0)$ un point de $\Gamma' \cap \Delta'$, et par N_0 le point $g(M_0)$; on suppose que M_0 n'appartient à aucune des trois droites $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$. Démontrer que Γ' et Δ' ont en M_0 une tangente commune au moins si, et seulement si, Γ et Δ ont en N_0 une tangente commune au moins. $\big($On pourra traiter d'abord le cas : $X_0 = Y_0 = T_0$.$\big)$

4° *a.* On considère une tangente double L à C_λ ne passant par aucun des trois points définis au II-2° par (1). Démontrer que la conique propre $g(L)$ est soit bitangente, soit surosculatrice à la conique Γ_λ attachée à la forme $X^2 + Y^2 + T^2 + 2\lambda(YT + TX + XY)$. Quelles sont les images par g des tangentes doubles trouvées au II-2°?

b. Trouver, λ étant fixé dans Λ, les coniques de la famille $\mathscr{T}$ qui sont bitangentes ou surosculatrices à Γ_λ. On pourra utiliser la propriété suivante : deux coniques propres, définies en coordonnées ponctuelles ou tangentielles par des matrices symétriques U et V, relatives à un repère projectif donné, sont bitangentes ou surosculatrices si, et seulement si, il existe des complexes ξ et η tels que la matrice $\xi U + \eta V$ soit de rang 1.

c. Déduire de ce qui précède que les tangentes doubles à C_λ, autres que celles déjà trouvées au II-1° et au II-2°, sont les douze droites dont les équations $\alpha X + \beta Y + \gamma T = 0$ ont leurs coefficients α, β, γ assujettis à vérifier l'un des systèmes (2), (3), (4) suivants :

$$(2) \begin{cases} \alpha^2 = -(2\lambda + 1) \\ \beta^2 = \gamma^2 = 1 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} \beta^2 = -(2\lambda + 1) \\ \gamma^2 = \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \gamma^2 = -(2\lambda + 1) \\ \alpha^2 = \beta^2 = 1 \end{cases}$$

Montrer que pour $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ces tangentes doubles sont toutes ordinaires. Étudier le cas $\lambda = \frac{3}{2}$.

d. Utiliser les résultats précédents pour représenter relativement à un système d'axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ (unité 2 cm) la courbe d'équation $x^4 + y^4 - 4x^2y^2 - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0$; tracer ses tangentes doubles.

5° Il résulte de I-4° qu'on a : $\mathcal{H}(Q) \subset \mathcal{H}(C_\lambda)$.

a. Par chacun des neuf points suivants :

$$(5) \qquad \begin{cases} (1,0,0) & (0,1,0) & (0,0,1) & (1,1,0) & (1,-1,0) \\ (1,0,1) & (0,1,1) & (-1,0,1) & (0,-1,1) \end{cases}$$

passent quatre tangentes doubles à C_λ. Démontrer que :

$$\text{pour } \lambda' = -\frac{3}{4}\left(1 + i\sqrt{7}\right) \quad \text{et} \quad \lambda'' = -\frac{3}{4}\left(1 - i\sqrt{7}\right)$$

il existe d'autres points par lesquels on peut mener quatre tangentes doubles à C_λ $\big($on pourra en chercher sur la droite $X - Y = 0\big)$.

b. On pourra admettre que, pour $\lambda \in \Lambda - \{\lambda', \lambda''\}$, les neuf points (5) sont les seuls par lesquels il passe quatre tangentes doubles à C_λ. En déduire qu'on a alors : $\mathcal{H}(C_\lambda) = \mathcal{H}(Q)$.

Prouver que, si λ et μ sont deux éléments distincts de $\Lambda - \{\lambda', \lambda''\}$, il n'existe pas d'homographie h appartenant à PGL(2,C) telle qu'on ait :

$$h(C_\lambda) = C_\mu$$

6° Examiner ce que devient l'ensemble des tangentes doubles pour C_∞, et montrer qu'on a encore $\mathcal{H}(C_\infty) = \mathcal{H}(Q)$.

N. B. — On ne cherchera pas à étudier les groupes $\mathcal{H}(C_{\lambda'})$ et $\mathcal{H}(C_{\lambda''})$.

Trop de candidats n'ont sur les espaces projectifs et les transformations homographiques que des connaissances extrèmement vagues ; le nombre élevé de copies blanches ou nulles sur cette partie du pro - un gros tiers de l'effectif des présents obtient au plus 5 sur 60 - incite à penser que beaucoup d'entre eu ont délibérément laissé de côté ces questions au cours de la préparation. De façon plus générale d'ailleu l'épreuve de Mathématiques générales et les épreuves orales montrent que la géométrie est négligée trop sc pendant les révisions traditionnelles et aussi probablement pendant les études supérieures en Faculté. Si ler les erreurs et les non-sens les plus grossiers est peut-être la meilleure façon d'inciter les futurs cand à réfléchir sur les méfaits d'une préparation incomplète et sur la nécessité de posséder une bonne maîtris toutes les techniques de base ; ces fautes sont en quelque sorte authentifiées par ces phrases entre guille relevées sur certaines copies et ... retrouvées sur bien d'autres sous une forme voisine.

Partie I

- «Le groupe P.GL $(2, \mathbb{C})$ est le groupe circulaire» caractérise une confusion trop fréquente entre le plan Cauchy et le plan projectif complexe, entre transformations circulaires et transformations homographique
- «Distinguons plusieurs cas : a) les côtés de Q se rencontrent ; b) ces côtés sont parallèles». On ne sait toujours qu'il est absurde de parler dans le plan projectif de droites parallèles tout autant que d'y sépar ellipses, hyperboles, paraboles.
- «L'espace vectoriel $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dont le plan projectif $P_2(\mathbb{C})$ est issu» (très fréquent).
- «Une homographie $h \in$ PGL$(2, \mathbb{C})$ a trois points fixes non alignés ou une droite de points fixes seulem
- « (0,0,0) est un point $P_2(\mathbb{C})$» (très fréquent !).
- «Une homographie plane est délimitée par trois points».
- «Par quatre points du plan passe une conique et une seule».
- «$\tilde{h}$ est une homographie car la transmuée d'une application par une bijection est une application de mêm nature».
- «Le déterminant d'une homographie de A(Q) doit être positif, car cette homographie induit sur Q une pe tation paire».
- «Q^* étant dual de Q, le groupe $H(Q^*)$ est le groupe dual de H(Q)». (Pour certains candidats un quadrila Q^* définit un seul quadrangle Q).
- Dans plusieurs dizaines de copies, les matrices des homographies de $P_2(\mathbb{C})$ sont carrées d'ordre deux quatre. Trop de candidats n'ont d'ailleurs pas songé que les coordonnées de chaque point ne sont défin qu'à un facteur non nul près; il en est résulté soit des matrices fausses (rendons hommage à ceux qui l' vu et l'ont dit) soit des matrices exactes sans doute, mais par chance.
- Au I 2°, un diagramme d'applications est insuffisant pour établir que $\tilde{h}$ est une homographie. La relatic $\tilde{h} = \theta . h . \theta^{-1}$ est incorrecte car h est définie sur $P_2(\mathbb{C})$ sur Φ. La relation entre le cardinal I_Q et le cardinal du noyau de l'homomorphisme $h \longrightarrow \tilde{h}$ est très rarement utilisée, parfois même contredite.
- Au I 3° a), une énumération n'est une démonstration (combien maladroite !) que si elle est complète, C de temps perdu par telle candidate qui, pour résoudre cette question a écrit sur la copie quatre-vingts permutations !
- Une permutation de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est une bijection de cet ensemble sur lui-même. Les jur ont accepté les produits de permutations «de gauche à droite» ou de «droite à gauche», ainsi que l'inte prétation des permutations comme des opérations sur le rang des éléments.
- A la fin du I, les confusions entre courbe invariante et forme invariante sont fréquentes. Au I 4°, il est indispensable de distinguer le cas des formes réductibles de celui des formes irréductibles.

Partie II

- Le calcul des points singuliers de F_∞ est rarement effectué correctement. Trop de candidats croient découvrir que «(0,0,0) est point singulier de chaque F_λ». Il a été constaté une absence fréquente de méthode et de rigueur dans la discussion de systèmes d'équations (par exemple pour traduire la proportionnalité des formes ou pour chercher les points singuliers des C_λ) ; en particulier l'équivalence entre la question posée et le système utilisé n'est pas toujours justifiée.

- Les tentatives pour établir l'irréductibilité de F_∞ partent trop souvent d'affirmations non justifiées (symétrie des facteurs, produit de deux polynômes du second degré,...) et sont mal conduites, sans aboutissement valable. Finalement au concours féminin, cette irréductibilité a été établie correctement dans trois copies ; dans les autres on relève des phrases du genre «F_∞ est irréductible car sa seule racine est (0,0,0)» ou «F_∞ est divisible par $X + Y - T$» ou «les facteurs irréductibles d'un polynôme symétrique sont symétriques»...

- Le nombre des candidats qui arrivent à donner une représentation rationnelle de C_∞ est finalement très limité. Nombreux sont ceux qui affirment donner une telle représentation avec des formules du genre : «$x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ... »; la seule façon connue de paramétrer une quartique semble être de couper par des droites passant par un point singulier -(mais «il faudrait un point d'ordre 3» remarque une candidate).

- La décomposition de $C_{-\frac{1}{2}}$ est rarement obtenue ; elle se déduit pourtant immédiatement de l'identité :
$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc)$$

- Dans le II, 2° la recherche des tangentes doubles à C_λ passant par les points (0,0,1), (0,1,0) et (1,0,0) ne présente aucune difficulté même technique ; il suffit de considérer le seul point (0,0,1) et de couper C_λ par la droite d'équation $Y = mX$.

- Au II, 3° les confusions entre g et g^{-1} sont fréquentes. Dans 20 % des copies d'un correcteur «l'image par g de la quartique d'équation
$$X^4 + Y^4 + T^4 + 2\lambda(Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2) = 0$$ est la courbe de degré 8 définie par
$$X^8 + Y^8 + T^8 + 2\lambda(Y^4T^4 + T^4X^4 + X^4Y^4) = 0$$ » [Rappelons que par g le point (X, Y, T) a pour image le point (X^2, Y^2, T^2).]

- Au II, 3° b) on oublie de montrer que g applique L <u>sur</u> une conique <u>propre</u> .

Les questions II 3° c) et II 4° ont été heureusement abordées dans quelques très bonnes copies.

Répartition des notes

HOMMES

	0 ≤ n ≤ 5	5 < n ≤ 10	10 < n ≤ 15	15 < n ≤ 20	20 < n ≤ 25	25 < n ≤ 30	30 < n ≤ 35	35 < n ≤ 40	40 < n ≤ 45	45 < n < 50	50 < n < 55	55 < n < 60
Présents	299	152	120	102	56	42	17	8	15	13	6	5
Admissibles	3	7	35	67	51	40	17	8	14	13	6	5
Admis	0	0	11	24	27	28	14	7	11	13	6	5

FEMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présentes	170	115	78	73	32	17	16	12	5	1	4	2
Admissibles	0	18	32	53	30	16	15	12	5	1	4	2
Admises	0	6	12	22	17	9	13	12	5	1	4	2

ANALYSE

Durée : 6 heures

N.B. — *Les différentes parties du problème sont indépendantes dans une large mesure.*

On désigne par P le *demi-plan de Poincaré*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, et par D le *disque unité*, ensemble des nombres complexes de valeur absolue (ou module) strictement inférieure à 1.

Les fonctions considérées sont à valeurs complexes.

I

Le but de la première partie est de rechercher les représentations conformes de P sur lui-même.

1° *Transformation de Cayley.* Démontrer que les conditions $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| < 1$ sont équivalentes. En déduire que l'application $z \longmapsto \dfrac{z-i}{z+i}$ définit une représentation conforme de P sur D; déterminer l'application réciproque.

2° Quelles sont les transformations homographiques $z \longmapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ qui conservent globalement P? Quel est l'ensemble des images d'un point donné de P par ces transformations?

En déduire, à l'aide de la question 1°, les transformations homographiques qui conservent globalement D.

3° Déterminer les transformations conformes du disque D sur lui-même qui laissent fixe l'origine (on pourra utiliser le lemme de Schwarz sur les fonctions holomorphes dans un disque).

4° Montrer qu'il n'y a pas d'autres représentations conformes de D sur lui-même ou de P sur lui-même que les transformations homographiques déterminées à la question 2°.

Démontrer que les translations réelles $z \longmapsto z + \xi$ (ξ réel), les homothéties $z \longmapsto \eta z$ ($\eta > 0$) et la transformation $z \longmapsto \dfrac{-1}{z}$ engendrent le groupe des représentations conformes de P sur lui-même.

II

On désigne par G le groupe des matrices carrées réelles d'ordre 2 dont le déterminant vaut 1 (groupe hyperbolique); on le fait opérer sur P par $g \, . \, z = \dfrac{az+b}{cz+d}$, où g est l'élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G et z un élément quelconque de P. Soit $p \in \mathbf{Z}$ un entier relatif fixé dans la suite de l'étude.

Pour toute fonction φ à valeurs complexes définie dans P et pour tout élément $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G, on désigne par φ_g la fonction :

$$z \longmapsto \varphi_g(z) = [\mathrm{Am}\,(cz+d)]^{-p}\, \varphi(g \, . \, z)$$

en posant pour tout complexe z non nul $\mathrm{A m}\, z = \dfrac{z}{|z|}$.

1° Démontrer que, quels que soient les éléments g et g' de G et la fonction φ, on a :

$$(\varphi_g)_{g'} = \varphi_{gg'}$$

2° Si φ est une fonction deux fois continûment différentiable *au sens réel* (c'est-à-dire par rapport à $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$) dans P, on définit l'opérateur Ω par $\Omega\varphi = y^2 \Delta\varphi - ipy \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien. Démontrer que pour tout $g \in \mathrm{G}$ on a $\Omega\,(\varphi_g) = (\Omega\,\varphi)_g$ (on démontrera qu'il suffit de vérifier cette relation pour une famille de générateurs de G; on achèvera la démonstration en utilisant les générateurs mis en évidence dans la question I 4° ainsi éventuellement qu'une expression de Ω à l'aide de $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$).

3° Démontrer que, si φ est une fonction propre de Ω, c'est-à-dire s'il existe un nombre complexe λ tel que :

(1) $$\Omega\varphi = \lambda\varphi \qquad \varphi(z) \not\equiv 0$$

alors, pour tout élément g de G, φ_g est encore fonction propre de Ω avec la même valeur propre λ.

Déterminer, s étant un complexe fixé, les fonctions ω définies dans P qui vérifient :

$$\omega\,(az + b) = a^s\,\omega\,(z)$$

quels que soient les nombres réels a et b avec $a > 0$ et $z \in \mathrm{P}$ ($a^s = e^{s \operatorname{Log} a}$ avec $\operatorname{Log} a \in \mathbf{R}$). Démontrer que pour tout complexe λ on peut trouver s de manière que ces fonctions ω vérifient l'équation (1).

III

Le but du problème est l'étude des fonctions propres φ de l'opérateur Ω qui vérifient en plus, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $z \in \mathrm{P}$, l'équation fonctionnelle :

(2) $$\varphi\,(z + \xi) = e^{i\mu\xi}\,\varphi\,(z)$$

où μ est un réel donné.

1° A une fonction φ vérifiant (2) on associe la fonction $f : y \longmapsto \varphi\,(iy)$ définie pour $y > 0$; inversement φ est déterminée par f. Montrer que, pour que φ vérifie l'équation (1), il faut et suffit que f vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre, que l'on explicitera. Résoudre cette équation dans le cas particulier $\mu = 0$.

2° Dans le cas $\mu \neq 0$ on pose $\gamma\,(u) = f\left(\dfrac{u}{\mu}\right) = \varphi\left(\dfrac{i\,u}{\mu}\right)$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par γ, et montrer qu'elle se ramène par un changement de variable adéquat à l'équation de Whittaker :

$$\zeta^2\,\mathrm{W}''\,(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2}{4} - k\zeta + m^2 - \frac{1}{4}\right)\mathrm{W}\,(\zeta)$$

avec des valeurs de m et k que l'on calculera en fonction de p et λ.

Démontrer que, pour $p = 0$, $h\,(u) = u^{-\frac{1}{2}}\,\gamma\,(u)$ vérifie l'équation de Bessel modifiée :

$$u^2 h'' + uh' - (u^2 + n^2)\,h = 0$$

(On précisera la valeur de n).

IV

1° Pour $z \in \mathrm{P}$, on pose :

$$\omega(z) = y^s = e^{s \operatorname{Log} y} \qquad \text{(Log } y \text{ étant réel)}$$

$$\psi(z; g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_g(z+\xi)\, e^{-i\mu\xi}\, d\xi \qquad g \in \mathrm{G} \qquad \mu \in \mathbf{R}$$

Soit $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Démontrer que, pour s convenablement choisi, l'intégrale définissant $\psi(z; g_0)$ converge dans P. Montrer que $\psi(z; g_0)$ est fonction propre de Ω et satisfait (2).

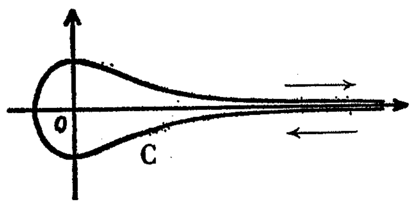
Écrire explicitement l'intégrale donnant $f_0(y) = \psi(iy; g_0)$.

2° Montrer que, si g est la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$, alors $\psi(z; g)$ est proportionnel à $\psi(z; g_0)$. Calculer le facteur de proportionnalité (on utilisera la décomposition $g = \sigma g_0 \tau \varepsilon$, ε désignant l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, τ et σ étant deux éléments de G associés respectivement à une translation et à une similitude conservant P).

3° Montrer que, dans le cas $\mu = 0$, $f_0(y)$ est de la forme $\mathrm{A}\, y^{1-s}$ où A est une intégrale fonction de s et de p que l'on pourra calculer en se ramenant à une intégrale eulérienne :

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{-(\alpha+\beta)}\, dt$$

(On pourra faire le changement de variable d'intégration $\theta = -\dfrac{\xi + iy}{iy}$, et, en notant que dans l'intégrale obtenue on a $|\theta|^2 = -\theta(\theta+2)$, transformer le contour d'intégration d'abord en un contour de Hankel (cf. figure), puis en $]\,0, +\infty\,[$ par un passage à la limite valable moyennant certaines restrictions sur s).



4° Dans le cas général $\mu \neq 0$, expliciter l'intégrale donnant $\gamma_0(u) = f_0\left(\dfrac{u}{\mu}\right)$.

Le changement de variable $v = i\mu\xi - u$ permet de transformer cette intégrale en une intégrale sur un contour C de Hankel, comme à la question précédente. On indiquera des conditions suffisantes pour que cette transformation soit applicable et les valeurs de s pour lesquelles la nouvelle intégrale converge.

En déduire l'expression de f_0 à l'aide de la fonction de Whittaker :

$$\text{(3)} \quad \mathrm{W}_{k,m}(z) = -\frac{1}{2i\pi}\Gamma\left(k - m + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{z}{2}} z^k \int_{\mathrm{C}} (-v)^{m-k-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{v}{z}\right)^{m+k-\frac{1}{2}} e^{-v}\, dv$$

Pour $p = 0$, on obtient sous forme intégrale une solution de l'équation de Bessel modifiée.

5° Démontrer que, moyennant une hypothèse convenable sur s, on peut transformer l'intégrale précédente en une intégrale sur $]\,0, +\infty\,[$ comme à la question IV 3°. Expliciter l'intégrale transformée (on rappelle l'égalité $\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi \alpha}\Big)$.

6° Démontrer que, en prenant une détermination convenable de $(1 + x)^{-\alpha}$, qui sera précisée, et α non entier négatif, on a :

$$(1+x)^{-\alpha} = \frac{1}{2 i \pi} \int_{\Delta} \frac{\Gamma(-u+\alpha)\,\Gamma(u)}{\Gamma(\alpha)} x^{-u}\, du$$

pour $|\arg x| < \pi$ et pour un contour convenable Δ allant de $-\infty i$ à $+\infty i$ (on pourra utiliser un calcul de résidus ou la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier, et la formule asymptotique :

$$\Gamma(z + a) \sim \sqrt{2\pi}\, \exp\left[\left(z + a - \frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} z - z\right]$$

pour $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ avec $\delta > 0$).

7° Démontrer, à l'aide de la question précédente, que :

$$(4)\quad W_{k,-s+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2 i \pi} e^{-\frac{z}{2}} z^k \int_{\Delta} \frac{\Gamma(s-k-u)\,\Gamma(1-s-k-u)\,\Gamma(u)}{\Gamma(s-k)\,\Gamma(1-s-k)} z^u\, du$$

pour $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$, si $s-k$ et $1-s-k$ ne sont ni l'un ni l'autre des entiers négatifs. En déduire que $W_{k,-s+\frac{1}{2}} = W_{k,s-\frac{1}{2}}$.

8° Démontrer à l'aide de la formule (3) ou de la formule (4) que $W_{k,m}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$e^{-\frac{z}{2}} z^k \left(1 + \frac{\alpha_1}{z} + \dots\dots\dots + \frac{\alpha_n}{z^n} + r_n\right)$$

où r_n est dominé par $\dfrac{1}{|z|^{n+1}}$ lorsque $|z| \longrightarrow \infty$, $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$.

9° Démontrer que les fonctions $z \longmapsto W_{k,m}(z)$ et $z \longmapsto W_{-k,m}(-z)$ sont des solutions indépendantes de l'équation de Whittaker. En déduire la solution générale du système des deux équations (1) et (2), ainsi que les solutions de ce système qui sont dominées par une puissance de y lorsque $y \longrightarrow +\infty$.

Le but du problème était de faire apparaître le lien entre la théorie de certaines fonctions spéciales et la théorie des groupes : on y étudie les fonctions de Whittaker à partir du groupe hyperbolique G opérant dans le demi-plan de Poincaré. La première partie est pratiquement une question de cours : détermination d automorphismes analytiques complexes du demi-plan de Poincaré. Les parties II et III préparent à l'étude projetée en définissant l'opérateur linéaire du second ordre Ω invariant par les opérations de G sur les fonc tions dans le demi-plan de Poincaré et en montrant comment s'introduisent les fonctions de Whittaker (et le fonctions de Bessel qui en sont un cas particulier). L'étude proprement dite occupe la quatrième partie ; tr peu de candidats malheureusement ont abordé cette partie et presque tous se sont noyés dans les difficulté de calcul du début. Faut-il rappeler à cette occasion que, pour faire des mathématiques, il est encore indis sable de savoir calculer !

Voici quelques remarques sur les différentes questions et les erreurs les plus fréquemment relevées

Partie I

1° - La question est très facile, pourtant quelques candidats y trouvent prétexte à remplir deux pag de calculs compliqués. Plusieurs ignorent apparemment le sens de «conforme» et l'interprètent comme synonyme de «bijectif».

2° - La difficulté consistait sans doute à montrer que a, b, c, d doivent être proportionnels à des nombres réels (par exemple en observant que la transformation conserve l'axe réel). La plupart des candida se sont limités à l'étude des homographies à coefficients réels. Ceux qui sont partis des homographies à coefficients complexes ont souvent commis dans leurs démonstrations l'erreur qui consiste à caractériser la transformation T, décomposée en un point $T_2 \, o \, T_1$ et conservant une partie E, en cherchant les conditi pour que chacune des transformations T_1 et T_2 conservent E ; les conditions ainsi obtenues sont seulemen suffisantes. Il semble aussi que l'on répugne à utiliser les interprétations géométriques des opérations sur $\mathbb{C}$ malgré l'aide que l'on peut quelquefois y trouver pour écourter un calcul pénible.

3° - Presque personne ne connaissait l'énoncé correct du lemme de Schwarz. Une erreur fréquente c consisté à écrire : s'il existe $z_0 \in$D tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors $f(z)$ est proportionnel à z ; comme or $f(0) = 0$ on peut prendre $z_0 = 0$! En fait il fallait appliquer le lemme de Schwarz à f et à sa réciproque f^{-1}.

Partie II

1° - En toute rigueur il fallait d'abord vérifier que G opère vraiment sur P, c'est-à-dire que $g(g'z) = (gg')z$ pour $g, g' \in$ G et $z \in$P. Cette vérification a souvent été oubliée.

2° - Le plus simple, pour se ramener aux générateurs du groupe, consistait à observer que l'ensemt des éléments g tels que $\Omega(\varphi g) = (\Omega\varphi)_g$ est un sous-groupe de G en vertu de la question précédente. Quelqu candidats ont écrit un élément générique de G comme combinaison linéaire des générateurs. Ecrire g sous forme d'un produit de générateurs nécessitait, en toute rigueur, un raisonnement par récurrence.

Le cas des translations et des homothéties est trivial. Signalons pourtant qu'il fallait utiliser pour l homothéties la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\eta} \end{pmatrix}$ et se garder de dire qu'on a nécessairement $\eta = 1$ comme plusieurs cand l'ont fait. Tous ont oublié le cas : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le cas du générateur $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la première véritable difficulté, car le calcul est assez compliqu Cette difficulté n'a presque jamais été surmontée, faute de savoir calculer correctement les dérivées partie Ce calcul a révélé des lacunes graves dans le maniement des opérateurs $\frac{\partial}{\partial z}$ et $\frac{\partial}{\partial z'}$; on trouve pc exemple l'erreur suivante : $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi(\frac{1}{z}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}(\frac{1}{z}) \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\frac{1}{z}) = 0$!

Notons enfin que de nombreux candidats se sont contentés de trouver la solution particulière y^s de l'équation fonctionnelle $\omega(az+b) = a^s\,\omega(z)$ et n'ont pas su montrer que les autres lui sont proportionnelles.

Partie III

1° - La résolution de l'équation différentielle $y^2 f'' = \lambda f$ a arrêté un certain nombre de candidats. Signalons que c'est un cas très particulier des équations du type de Fuchs qui sont au programme ; le cas $d = -\frac{1}{4}$ a été oublié la plupart du temps.

2° - Comme f est seulement définie pour $y > 0$, il faut distinguer les cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$.

Partie IV

Certains candidats se sont crus obligés de traîner l'écriture $e^{s \operatorname{Log} y}$ pour y^s tout au long des calculs, ce qui devient vite intenable. L'étude de la convergence de l'intégrale repose sur une majoration de la fonction à intégrer et en définitive sur la formule $\left|\,|z+\xi|^{2s}\right| = |z+\xi|^{2\,Re(s)}$. Lisant trop rapidement l'énoncé, bon nombre de candidats ont considéré s comme réel. D'autres arrivant à la condition $Re(s) > 0$ s'imaginent qu'une intégrale converge dès que la fonction sous le signe $\int$ tend vers 0 à l'infini.

Pour montrer que $\psi\,(z\,;\,g_0)$ est fonction propre de Ω on se ramène à $\omega_g(z)$ en dérivant sous le signe $\int$; il faut bien sûr justifier correctement cette opération. Pour ω_g le résultat est une conséquence évidente de II 2° et II 3°.

2° - La décomposition $g = \sigma\, g_0\, \tau\, \epsilon$ est en fait la même que dans I 4° ; le signe de ϵ est celui de c. Il faut observer que la translation τ s'élimine par un changement de la variable d'intégration (en faisant apparaître un facteur $e^{i\,\mu d/c}$) tandis que la similitude s'élimine à cause de la propriété de ω vue en II 3° (facteur $1/|c|^{2s}$).

3° - Pour calculer A par le changement de variable indiqué, il faut d'abord être capable de trouver le contour d'intégration décrit par la variable θ ; beaucoup ont fait comme si θ variait de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe réel, alors qu'il décrit une droite parallèle à l'axe imaginaire. La justification des transformations de contour suggérées par l'énoncé repose sur des calculs de majoration habituels dans le calcul des résidus.

4° et 5° - La méthode est entièrement parallèle à celle de la question précédente. Le plus grand soin doit être apporté au choix des arguments de $-v$ et $(1 + \frac{v}{z})$.

La suite du problème n'a pratiquement pas été abordée. A la sixième question on doit faire attention à placer correctement le contour Δ par rapport aux pôles $\Gamma(u)$ (c'est-à-dire les entiers négatifs) et aux pôles de $\Gamma(-u+\alpha)$ de la forme $(\alpha + n,\ n \in N)$. De même à la septième question Δ doit laisser d'un côté les entiers négatifs et de l'autre les points $s-k+n$ et $1-s-k+n$ $(n \in N)$. Pour obtenir l'intégrale (4) à partir de la formule de la sixième question et de l'intégrale obtenue dans la question 5° il faut justifier l'interversion de l'ordre des intégrations.

Pour la huitième question la formule (4) donne directement le développement asymptotique avec l'expression des coefficients α_i par un calcul de résidus analogue à celui de la sixième question. Si on part de (3) c'est un peu plus difficile et on n'obtient pas tout de suite le domaine de validité $(|\arg z| < 3\pi/2)$.

A la neuvième question l'interdépendance des deux solutions se lit sur leurs parties principales pour $|z| \longrightarrow +\infty$.

Répartition des notes

Le problème certainement est long. Mais chacune des trois premières parties comporte des questions très faciles ; cela explique sans doute que les notes soient plutôt meilleures que celles du concours précédent.

HOMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présents	97 x	85	117	134	118	84	55	38	20	12	10	10
Admissibles	0	1	3	23	46	58	45	38	20	12	10	10
Admis	0	0	2	6	16	25	19	29	18	12	9	10

x dont quatorze 0.

FEMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présentes	42 xx	36	80	97	107	59	33	16	9	2	2	1
Admissibles	0	0	1	22	53	50	32	16	9	2	2	1
Admises	0	0	0	11	17	26	21	14	9	2	2	1

xx dont un 0

COMPOSITION D'ANALYSE NUMÉRIQUE

N. B. — *Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies; en particulier les abréviations abusives risquent de n'être pas comprises. Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé. Les questions posées aux candidats sont désignées dans le texte par les symboles* (Q_i) $(i = 1, 2, ..., 37)$ *qui se détachent dans la marge.*

Tous les scalaires du problème sont réels.

NOTATIONS. — Les éléments $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathrm{R}^n$ sont identifiés à des matrices colonnes à n lignes; on pose pour $u,v \in \mathrm{R}^n$

$$(u\,,v)_n = \sum_{i=1}^{n} u_i . v_i$$

$$\|u\|_n = (u\,,u)_n^{1/2}$$

$$\{\{u\}\}_n = \sum_{i=1}^{n} |u_i|$$

I. PRÉLIMINAIRES

1° Soit U un sous-ensemble convexe, fermé de R^n. On désigne par P l'opérateur projection de R^n sur U; Pw est le point de U réalisant le minimum de la distance de w à U.

Q1 : Montrer que les relations (1) *et* (2) *sont équivalentes :*

(1) $\quad u = \mathrm{P}w.$

(2) $\quad \begin{cases} u \in U \\ (w - u,\, v - u)_n \leqslant 0 \qquad \forall v \in U. \end{cases}$

Q2 : Montrer que P *vérifie :*

(3) $\quad \| \mathrm{P}w_1 - \mathrm{P}w_2 \|_n \leqslant \| w_1 - w_2 \|_n \qquad \forall\, w_1,w_2 \in \mathrm{R}^n.$

2° Soit $A = (a_{i,j})$ $i, j = 1, ..., n$ une matrice symétrique et définie positive.

$$\begin{cases} a_{i,j} = a_{j,i} & \forall i,j, \text{ ou encore, } A = A^* \\ (Av, v)_n > 0 & \forall v \in R^n,\ v \neq 0 \end{cases}$$

Q3 : Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que :

(4) $$(Av,v)_n \geqslant \alpha \| v \|_n^2 \qquad \forall v \in R^n.$$

3° Soit J une fonction numérique **convexe** définie sur R^n.

Q4 : Démontrer que tout minimum local est un minimum global : de façon plus précise, démontrer que (5) *entraîne* (6) :

(5) il existe $\varepsilon > 0$ tel que $J(u) \leqslant J(v)$ pour $v \in R^n$, $\| v - u \| \leqslant \varepsilon$.

(6) $$J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in R^n.$$

4° On donne une matrice $A = (a_{i,j})$ $i, j = 1, ..., n$ vérifiant :

$$\begin{cases} A = A^* \\ (Av, v)_n \geqslant 0 \qquad \forall v \in R^n, \end{cases}$$

un élément $f \in R^n$ et un sous-ensemble U convexe et fermé dans R^n; on pose :

(7) $$J_0(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_n - (f, v)_n$$

Q5 : Montrer que les relations (8) *et* (9) *sont équivalentes :*

(8) $$\begin{cases} u \in U \\ J_0(u) \leqslant J_0(v) \qquad \forall v \in U \end{cases}$$

(9) $$\begin{cases} u \in U \\ (Au - f, v - u)_n \geqslant 0 \quad \forall v \in U \end{cases}$$

Q6 : Que représente $Au - f$ pour la fonction $J_0 : u \to J_0(u)$.

Soit J_1 une fonction convexe définie sur R^n; on pose :

$$J(v) = J_0(v) + J_1(v)$$

Q7 : Montrer que les relations (10) *et* (11) *sont équivalentes :*

(10) $$\begin{cases} u \in U \\ J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in U \end{cases}$$

(11) $$\begin{cases} u \in U \\ (Au - f, v - u)_n + J_1(v) - J_1(u) \geqslant 0 \qquad \forall v \in U \end{cases}$$

II

1° On donne :

— une matrice $A = (a_{i,j})$ $i,j = 1, ..., n$ qui vérifie :

(12) $$\begin{cases} A = A^* \\ (Av, v)_n \geqslant \alpha \| v \|_n^2 \qquad \forall v \in R^n, \qquad \alpha > 0 \end{cases}$$

— un ensemble U convexe et fermé dans R^n

— un élément $f \in R^n$.

On pose :

$$J_0(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_n - (f, v)_n$$

Problème $\mathcal{P}_0$: Déterminer u tel que :

(13) $$\begin{cases} u \in U \\ J_0(u) \leqslant J_0(v) \qquad \forall v \in U \end{cases}$$

Q8 : Montrer que le problème $\mathcal{P}_0$ *a une solution et une seule.*

Q9 : Donner une relation équivalente à (13).

On construit une suite u^m par le procédé suivant :

$$(14) \quad \begin{cases} u^0 \text{ donné dans } U \\ u^{m+1} = \mathrm{P}(u^m - \rho(\mathrm{A}u^m - f)) \qquad m = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

(P a été introduit au début de I. 1°)

Q10 : Démontrer qu'il existe $\bar{\rho}$ *tel que pour* ρ *fixé vérifiant :*

$$0 < \rho < \bar{\rho}$$

la suite u^m *converge vers* u*, solution du problème* $\mathcal{P}_0$*, lorsque* m *tend vers l'infini.*

2° En plus des éléments de II, 1° (excepté l'ensemble U qui ne sera plus utilisé), on donne une matrice $\mathrm{B} = (b_{i,j})$ $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, n$ (k lignes et n colonnes) et un élément $g \in \mathrm{R}^k$; on pose :

$$\mathrm{J}_1(v) = \|\mathrm{B}v - g\|_k = \sum_{i=1}^{k} |(\mathrm{B}v - g)_i|$$

$$(15) \qquad \mathrm{J}(v) = \mathrm{J}_0(v) + \mathrm{J}_1(v)$$

Problème $\mathcal{P}$: Déterminer u tel que :

$$(16) \quad \begin{cases} u \in \mathrm{R}^n \\ \mathrm{J}(u) \leqslant \mathrm{J}(v) \qquad \forall v \in \mathrm{R}^n \end{cases}$$

Q11 : Démontrer que :

i. *La fonction* J *est* **strictement convexe**

ii. $\lim\limits_{\|v\|_n \to +\infty} \mathrm{J}(v) = +\infty.$

Q12 : Montrer que le problème $\mathcal{P}$ *a une solution et une seule.*

Q13 : Donner une relation équivalente à (16).

3° On donne :

— une matrice $\mathcal{A} = (\alpha_{i,j})$ $i, j = 1, \ldots, k$ qui vérifie :

$$(17) \quad \begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \quad \mathcal{A} \neq 0 \\ (\mathcal{A}\mu, \mu)_k \geqslant 0 \qquad \forall \mu \in \mathrm{R}^k \end{cases}$$

— un élément $\mathcal{F} \in \mathrm{R}^k$

— un ensemble Λ convexe, fermé et borné dans R^k.

On pose :

$$(18) \qquad \mathrm{J}^*(\mu) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mu, \mu)_k - (\mathcal{F}, \mu)_k$$

Problème $\mathcal{P}^*$: Déterminer λ tel que :

$$(19) \quad \begin{cases} \lambda \in \Lambda \\ \mathrm{J}^*(\lambda) \leqslant \mathrm{J}^*(\mu) \qquad \forall \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q14 : Montrer que le problème $\mathcal{P}^*$ *a au moins une solution* λ.

Q15 : Donner un exemple où le problème $\mathcal{P}^*$ *a plus d'une solution.*

Q16 : Donner une relation équivalente à (19).

Nous allons étudier maintenant deux méthodes itératives qui nous permettront d'approcher une solution du problème $\mathcal{P}^*$.

MÉTHODE 1 : on construit la suite λ^m par :

$$(20) \quad \begin{cases} \lambda^0 \text{ donné dans } \Lambda \\ \lambda^{m+1} = P(\lambda^m - \rho(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F})) \qquad m = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

où le nombre positif ρ sera choisi plus loin et où P désigne la projection de R^k sur Λ.

Q17 : Montrer que :

$$(21) \quad \begin{cases} J^*(\lambda^{m+1}) = J^*(\lambda^m) + (\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \Delta\lambda^m)_k + \dfrac{1}{2}(\mathcal{A}\Delta\lambda^m, \Delta\lambda^m)_k \\ \Delta\lambda^m = \lambda^{m+1} - \lambda^m \end{cases}$$

Q18 : Montrer que :

$$(22) \qquad \rho(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \Delta\lambda^m)_k + \|\Delta\lambda^m\|_k^2 \leqslant 0$$

Q19 : Montrer que pour ρ vérifiant :

$$(23) \qquad 0 < \rho < \frac{2}{\|\mathcal{A}\|}, \quad \|\mathcal{A}\| = \max_{\|\mu\|_k = 1} \|\mathcal{A}\mu\|_k$$

lorsque $m \to +\infty$

i. *la suite* $J^*(\lambda^m)$ est décroissante

ii. *la suite $\Delta\lambda^m$ tend vers* 0.

Q20 : Montrer que tout point adhérent à la suite λ^m est une solution de $\mathcal{L}^*$.

MÉTHODE 2 : λ^0 est toujours donné dans Λ; on va construire λ^{m+1} à partir de $\lambda^m \in \Lambda$ par le procédé suivant : soit ν^m tel que :

$$(24) \quad \begin{cases} \nu^m \in \Lambda \\ (\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \nu^m)_k \leqslant (\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \mu)_k \qquad \forall \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q21 : Existe-t-il ν^m vérifiant (24)?

Soit ρ un nombre fixe positif qui sera choisi plus loin. On pose :

$$(25) \quad \begin{cases} \rho^m = \min \left\{ 1, -\dfrac{1}{\rho}(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \nu^m - \lambda^m)_k \right\} \\ \lambda^{m+1} = \lambda^m + \rho^m(\nu^m - \lambda^m) \end{cases}$$

Q22 : i. *quel est le signe de ρ^m?*

ii. *étudier le cas* $\rho^m = 0$.

Soit d tel que :

$$(26) \qquad \lambda, \mu \in \Lambda \Rightarrow \|\lambda - \mu\|_k \leqslant d < +\infty$$

Q23 : Montrer que pour m assez grand on a :

$$(27) \quad J^*(\lambda^{m+1}) \leqslant J^*(\lambda^m) - \frac{1}{\rho^2}\left(\rho - \frac{d^2}{2}\|\mathcal{A}\|\right)(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \nu^m - \lambda^m)_k^2$$

en ayant choisi ρ tel que :

$$(28) \qquad \rho > \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\| d^2$$

Q24 : Montrer que tout point adhérent λ à la suite λ^m est une solution du problème $\mathcal{L}^*$.

III

On rappelle l'énoncé du théorème du « minimax » en dimension finie :

Les données et hypothèses :

- U et Λ sont des ensembles convexes, fermés et bornés, U dans R^n et Λ dans R^k
- $L : U \times \Lambda \to \mathrm{R}$; L est une application continue de $U \times \Lambda$ dans R
- $\forall \mu \in \Lambda$, l'application $v \to L(v,\mu)$ est convexe
- $\forall v \in U$, l'application $\mu \to L(v,\mu)$ est concave (c'est-à-dire : $\mu \to -L(v,\mu)$ convexe).

La conclusion : il existe un couple u, λ tel que :

$$(29) \quad \begin{cases} (u , \lambda) \in U \times \Lambda \\ L(u , \mu) \leqslant L(u , \lambda) \leqslant L(v , \lambda) \\ \forall\, v \in U \ , \ \forall\, \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q25 : Démontrer que :

$$(30) \quad L(u , \lambda) = \min_{v \in U} \ \max_{\mu \in \Lambda} \ L(v , \mu) = \max_{\mu \in \Lambda} \ \min_{v \in U} \ L(v , \mu)$$

On pose (dans toute la suite) :

$$(31) \quad L(v,\mu) = \mathrm{J}_0(v) + (\mathrm{B}v - g,\mu)_k$$

ou encore :

$$L(v , \mu) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}v , v)_n - (f , v)_n + (\mathrm{B}v - g , \mu)_k$$

(la matrice A vérifie les relations (12))

$$(32) \quad \Lambda = \{ \mu \mid \mu \in \mathrm{R}^k, \ | \mu_i | \leqslant 1, \quad i = 1, ..., k \}$$

Q26 : Peut-on utiliser le théorème du minimax avec les éléments $U = \mathrm{R}^n$, Λ *défini par* (32) *et* L *défini par* (31) ?

Soit p un nombre positif (destiné à tendre vers $+\infty$); on pose :

$$U_p = \{ v \mid v \in \mathrm{R}^n, \| v \|_n \leqslant p \}$$

Q27 : Montrer qu'on peut trouver un couple u^p, λ^p *tel que :*

$$(33) \quad \begin{cases} (u^p, \lambda^p) \in U_p \times \Lambda \\ L(u^p, \mu) \leqslant L(u^p, \lambda^p) \leqslant L(v,\lambda^p) \\ \forall v \in U_p \ , \ \forall\, \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q28 : Quel est le signe de $(\mathrm{B}u^p - g,\lambda^p)_k$?

Q29 : Démontrer qu'on peut trouver des constantes C_0 *et* C_1 *(indépendantes de p) telles que :*

$$(34) \quad \begin{cases} \mathrm{J}_0(u^p) \leqslant \mathrm{C}_0 \\ \| u^p \|_n \leqslant \mathrm{C}_1 \end{cases}$$

Q30 : Démontrer qu'on peut trouver un couple u, λ *tel que :*

$$(35) \quad \begin{cases} (u , \lambda) \in \mathrm{R}^n \times \Lambda \\ L(u , \mu) \leqslant L(u , \lambda) \leqslant L(v , \lambda) \\ \forall\, v \in \mathrm{R}^n \ , \ \forall\, \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q31 : Démontrer que :

$$(36) \quad \lambda_i | (\mathrm{B}u - g)_i | = (\mathrm{B}u - g)_i \quad i = 1, ..., k$$

Q32 : Démontrer que, si u est solution de (35), *alors u est aussi solution du problème* $\mathcal{P}$ *c'est-à-dire de* (16). *Conséquence?*

Q33 : Démontrer que :

$$(37) \qquad J(u) = \min_{v \in \mathbf{R}^n} \max_{\mu \in \Lambda} L(v, \mu) = \max_{\mu \in \Lambda} \min_{v \in \mathbf{R}^n} L(v, \mu)$$

Q34 : Que peut-on dire des problèmes « $\min\limits_{v \in \mathbf{R}^n} J(v)$ » *et* « $\min\limits_{v \in \mathbf{R}^n} \max\limits_{\mu \in \Lambda} L(v, \mu)$ »?

On désigne par $\mathcal{P}^*$ le problème $\max\limits_{\mu \in \Lambda} \min\limits_{v \in \mathbf{R}^n} L(v, \mu)$

Q35 : Démontrer que le problème $\mathcal{P}^*$ *peut se mettre sous la forme :*

$$« - \min_{\mu \in \Lambda} \left[\frac{1}{2}(\mathcal{A}\mu, \mu)_k - (\mathcal{F}, \mu)_k + C_2 \right] »$$

ou encore :

$$« \min_{\mu \in \Lambda} \left[\frac{1}{2}(\mathcal{A}\mu, \mu)_k - (\mathcal{F}, \mu)_k \right] »$$

au signe près et à une constante additive près. On demande d'expliciter $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$.

Q36 : i. *donner des propriétés de* $\mathcal{A}$.

ii. *peut-on approcher une solution* λ *du problème* $\mathcal{P}^*$ *à l'aide des méthodes 1 et 2 du n° II.*

Soit λ^m une suite construite à l'aide d'une des méthodes 1 ou 2, on définit u^m par :

$$(38) \qquad Au^m = f - B^*\lambda^m$$

Q37 : i. *montrer que* u^m *existe pour tout m*

ii. *comment utiliser* u^m *dans le calcul de* λ^{m+1}

iii. *montrer que* la suite u^m *converge vers la solution u du problème* $\mathcal{P}$ *quand m tend vers* $+\infty$.

L'épreuve proposée cette année aux candidats comportait l'étude de méthodes numériques pour la résolution de problèmes dits, «d'optimisation convexe», c'est-à-dire pour la construction du point, s'il existe, où une fonction réelle convexe atteint sa valeur minimum sur un domaine convexe $\mathbb{R}^n$. Ce genre de problème est des plus fréquents dans les applications actuelles des mathématiques et donne lieu à un grand nombre de «programmes» (linéaires, quadratiques) qui sont de base pour la recherche opérationnelle, en général, et dans des disciplines très variées (physique, mécanique, économie, etc...). La première impression qui se dégage de la lecture des copies est que pratiquement aucun candidat n'a la moindre idée d'une telle utilisation des mathématiques. Fait très regrettable, pour de futurs professeurs qui auront à apprendre celles-ci à un plus grand nombre d'utilisateurs que de «professionnels» qui les étudieraient «en soi». Il en résulte que les candidats se contentent d'essayer de répondre le plus «scolairement» possible aux questions posées mais ne font aucun effort pour dominer le sujet dans son ensemble.

C'est dans la partie I «Préliminaires» que les candidats ont eu le plus de difficultés. Celles-ci sont dues essentiellement à une méconnaissance très grande de la convexité. La convexité d'une partie U d'un espace vectoriel <u>n'est pas</u> une propriété d'un couple $(x,y) \in U \times U$ par rapport à U, mais une propriété du <u>segment</u> $[x,y]$ par rapport à U, c'est-à-dire des éléments de forme $\lambda x + (1-\lambda)y$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dans la question Q 1 il suffisait de remarquer que (1) est équivalent à : $\forall\, v \in U,\ \forall\, \lambda \in [0,1]$

$||\omega - u||^2 \leq ||\omega - (\lambda u + (1-\lambda)v||^2$ pour aboutir à l'équivalence demandée.

La question Q2 a donné lieu à des réponses à peine croyables. Il faut tout d'abord faire remarquer que 7 % des candidats affirment que P est linéaire (!) et 10 % disent que (3) signifie que P est contractant(!). Nous avons sévèrement jugé de telles erreurs.

La démonstration utilisant deux fois (2) a été trouvée par moins de 40 % des candidats. Un seul candidat de l'agrégation masculine a proposé la solution «géométrique» simple qui consiste à projeter w_1 et w_2 sur la droite joignant les points Pw_1 et Pw_2.

Dans la question Q3, très peu de candidats voient qu'on peut prendre pour α la plus petite valeur propre (forcément , > 0) de la matrice A. A ce propos, comme pour les années précédentes, nous constatons une grande méconnaissance des propriétés des matrices. Suivant une tendance trop générale, il semble que seules les propriétés des «opérateurs linéaires» abstraits soient travaillées. On signale qu'en analyse numérique on est nécessairement obligé de faire intervenir des représentations matricielles de tels opérateurs et que l'on est conduit à en utiliser les propriétés numériques les plus importantes.

Les questions Q5, Q7 se traitaient encore en introduisant tous les points du segment $[u,v]$, généralisant le raisonnement de la question Q1. Pour ce qui est de la question Q6, peu de candidats reconnaissent en $Au - f$ la différentielle (en u) de l'application $u \to J_0(u)$ représentable ici par une matrice de type $(n, 1)$, c'est-à-dire un vecteur de $\mathbb{R}^n$: c'est aussi le gradient (en identifiant $\mathbb{R}^n$ à son dual) en u de cette application.

Dans la partie II, on abordait la question de la minimisation d'une forme $J_0(v)$ quadratique à matrice A symétrique définie positive sur une partie convexe et fermée U de $\mathbb{R}^n$, U n'étant pas forcément bornée ; certains candidats ont bien compris qu'il suffisait de montrer qu'on pouvait se ramener au cas où U est bornée. Ce raisonnement est d'ailleurs suggéré dans la suite (Q 11). Fort peu se sont ramenés à une projection orthogonale : ce qui est possible en introduisant R (non singulière) telle que $A = R^t.R$ (et transformant U convenablement). L'étude de l'algorithme (14) a été assez décevante : c'est encore là une preuve du manque de connaissances sur les propriétés élémentaires des matrices, de leurs normes. Peu de candidats obtiennent la meilleure valeur pour la borne $\overline{\rho}$, à cause d'une mauvaise étude de $||I - \rho A||$ (I identité, $||\ ||$ norme matrice relative à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

La question Q11 a bien troublé les candidats : tout d'abord, pour prouver que $J_1(v)$ est convexe, il semble que l'on soit allé très loin ! Bien peu aussi connaissent la définition correcte de la stricte convexité. La partie 3°) du II se rapporte au cas où $J^*(\mu)$ est une forme quadratique avec matrice seulement symétrique non négative. L'existence d'une solution est encore assurée mais par forcément par l'unicité. Les candidats ont d'ailleurs trouvé des contre-exemples (très peu intéressants parfois !). Suivaient deux méthodes destinées à construire finalement des approximations de la solution u du problème P. Les candidats ayant pu arriver à ce point du problème (10 %) ne semblent pas avoir éprouvé de grandes difficultés.

La deuxième méthode proposée pour obtenir les inégalités (27) en tenant compte des deux possibilités de valeur pour ρ^m, n'a été convenablement rédigée que par un petit nombre de candidats.

La partie III n'a pas été abordée par plus de 6 % des candidats, sans doute par manque de temps. Il s'agissait de montrer après quelques rappels d'introduction qu'un problème de «mini-max» d'un certain type peut être résolu en utilisant les méthodes d'optimisation de la partie II. Aucun des candidats n'a complètement terminé les questions qui comportaient des calculs un peu longs à cette place. Il faut cependant signaler quatre très bonnes copies qui ont obtenu des notes voisines du maximum.

Nous ne pouvons que répéter que cette épreuve d'Analyse numérique devrait être préparée en faisant, à propos des programmes d'Analyse classique, porter ses efforts sur les parties les plus constructives. Des idées générales des programmes utilisés sur les calculatrices modernes ne seraient pas non plus inutiles pour placer les candidats dans un contexte qui leur paraisse un peu moins déroutant.

Répartition des notes

HOMMES

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présents	24	84	57	33	15	11	4	2	5
Admissibles	0	6	25	24	15	11	4	2	5
Admis	0	2	10	12	11	11	3	2	5

FEMMES

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présentes	6	45	38	27	22	22	9	9	4
Admissibles	0	1	8	17	17	19	9	9	4
Admises	0	0	4	10	8	10	8	7	4

COMPOSITION DE MÉCANIQUE

N.B. — *Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies; en particulier les abréviations abusives risquent de ne pas être comprises. Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé.*

Les unités de longueur, de masse et de temps sont supposées fixées; l'unité d'angle est le radian; le temps est désigné par t. Le produit vectoriel du vecteur $\vec{U}$ par le vecteur $\vec{V}$ est noté $\vec{U} \times \vec{V}$. $O_1x_1y_1z_1$ est un repère orthonormé direct considéré comme absolu.

Par rapport à $O_1x_1y_1z_1$ se déplace une plaque plane (S). On appelle m sa masse, G son centre d'inertie, $m\rho^2$ son moment d'inertie par rapport à G (ρ longueur donnée). $Gxyz$ est un trièdre orthonormé direct lié à (S), Gz étant perpendiculaire au plan de la plaque. On désigne par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes Gx, Gy, Gz respectivement.

La pesanteur n'est pas prise en considération.

Nota. — *Les trois parties* I, II, III *du problème sont indépendantes; elles pourront être traitées par les candidats dans l'ordre de leur choix.*

I

Dans cette première partie la plaque (S) se meut dans l'espace. Si $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur rotation instantanée de (S) par rapport à $O_1x_1y_1z_1$, on pose :

$$\vec{\Omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

On suppose que l'ellipsoïde central d'inertie de (S) est de révolution autour de Gz.

Deux insectes I et I′, de même masse M, assimilables à des points matériels, se déplacent sur l'axe Gz, supposé matérialisé et de masse négligeable, *suivant une loi donnée du temps,* en restant constamment symétriques par rapport à G; on notera $z(t)$ et $-z(t)$ les cotes respectives de I et I′ au temps t, z étant une fonction *donnée,* positive et pourvue de dérivées première et seconde continues. On se propose d'étudier le mouvement du système matériel (Σ) constitué par la plaque (S) et les deux insectes I et I′.

1° Que peut-on dire du mouvement du point G par rapport au repère $O_1x_1y_1z_1$, et du vecteur $\vec{\sigma}$, moment cinétique en G du système (Σ) par rapport à ce même repère?

2° Écrire le système différentiel permettant de calculer p, q, r en fonction de t et montrer que son intégration se ramène à une quadrature.

3° Exprimer, en fonction de $z(t)$, p, q, r et de leurs dérivées par rapport au temps, les composantes sur les axes Gx, Gy, Gz des réactions de l'axe Gz sur les insectes I et I′.

4° On suppose, dans cette question seulement, l'axe O_1z_1 parallèle au vecteur $\vec{\sigma}$ (supposé non nul) et de même sens que lui. Comment peut-on calculer en fonction de t les angles d'Euler ψ, θ, φ du trièdre $Gxyz$ par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$?

II

Dans cette seconde partie, les insectes I *et* I' *sont supprimés. On rappelle que la pesanteur n'est pas prise en considération.*

La plaque (S) est assujettie par une liaison bilatérale à glisser sans frottement sur le plan $x_1O_1y_1$ (les plans xGy et $x_1O_1y_1$ restent donc en coïncidence). Au point P de la plaque défini par $\overrightarrow{GP} = a\vec{i}$ (a longueur donnée) sont appliquées deux forces dont les supports restent dans le plan xGy. La première de ces forces a pour intensité vectorielle $m\vec{F}$, $\vec{F}$ étant un vecteur dont les composantes X, Y sur Gx et Gy sont des *constantes* données. La seconde force a pour intensité vectorielle $m\lambda\vec{k} \times \vec{V}(P)$, où λ est une constante donnée non nulle et $\vec{V}(P)$ le vecteur vitesse de P par rapport au repère $O_1x_1y_1z_1$.

On désigne par u et v les composantes sur Gx et Gy respectivement du vecteur vitesse de G par rapport au repère $O_1x_1y_1z_1$ et par $r\vec{k}$ le vecteur rotation instantanée de la plaque (S) par rapport à ce même repère.

A

1° Écrire le système d'équations différentielles du premier ordre permettant de calculer u, v, r en fonction de t (on ne cherchera pas à intégrer ce système).

2° Étudier la possibilité de mouvements de la plaque (S) dans lesquels r reste constant et non nul.

a. Que peut-on dire de ces mouvements dans le cas où r est différent de λ?

b. Examiner le cas $r = \lambda$. Lorsque Y n'est pas nul, déterminer la roulante et la base du mouvement du plan xGy sur le plan $x_1O_1y_1$.

B

1° Question préliminaire (*le candidat qui ne parviendrait pas à résoudre cette question pourra en admettre les résultats dans la suite*).

Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ les coordonnées d'un point x d'un espace euclidien réel de dimension n; on pose : $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}$, et on note ω le point de coordonnées nulles.

a. On note W une fonction réelle définie dans un voisinage de l'origine ω et nulle en ce point. On conviendra de dire que *cette fonction* W *est définie positive à l'origine, s'il existe un nombre $h > 0$ tel que* $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ *soit strictement positif en tout point x satisfaisant à :* $0 < \|x\| < h$.

Démontrer que, si la fonction W admet au point ω un développement limité d'ordre supérieur ou égal à deux dont les termes de plus bas degré constituent une forme quadratique définie positive, alors W est définie positive à l'origine.

b. Soit le système différentiel :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (i = 1, 2, ..., n)$$

où les f_i sont des fonctions réelles, données, nulles au point ω et satisfaisant à une condition de Lipschitz dans une boule $\|x\| \leqslant H$ (H constante positive).

Ce système admet la solution triviale $x = 0$. On rappelle que cette dernière est dite *stable* si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\eta > 0$

tel que toute solution $x(t)$ du système satisfaisant à $\|x(0)\| < \eta$ vérifie l'inégalité $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant 0$; dans le cas contraire la solution $x = 0$ est dite instable.

Démontrer que, si le système différentiel admet une intégrale première $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ définie positive à l'origine, alors la solution triviale du système est stable (on pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Lagrange-Dirichlet sur la stabilité d'un équilibre).

2° Montrer que, parmi les mouvements de (S), il existe un mouvement de translation rectiligne et uniforme, et un seul. Dans la suite il sera appelé mouvement $\mathcal{M}$. Calculer les valeurs correspondantes u_0 et v_0 de u et v.

3° On pose : $\quad u = u_0 + \Delta u, \qquad v = v_0 + \Delta v.$

Écrire le système différentiel ($\mathcal{S}$) vérifié par les fonctions Δu, Δv, r.

On dit que le mouvement $\mathcal{M}$ est stable (resp. instable) par rapport aux vitesses si la solution triviale du système ($\mathcal{S}$) est stable (resp. instable) [voir question préliminaire].

4° En linéarisant le système ($\mathcal{S}$), donner des conditions suffisantes d'instabilité du mouvement $\mathcal{M}$ par rapport aux vitesses.

5° En utilisant la question préliminaire, démontrer que, si l'on a $Y = 0$ et $X < \lambda^2\left(a + \frac{\rho^2}{a}\right)$, le mouvement $\mathcal{M}$ est stable par rapport aux vitesses.

(On montrera que, dans ces conditions, on peut former deux intégrales premières W_1 et W_2 du système ($\mathcal{S}$) ayant les propriétés suivantes : W_2 est une forme quadratique en Δu, Δv, r et il existe une infinité de nombres ν tels que la fonction $W = W_2 + \nu W_1^2$ soit définie positive à l'origine.)

III

Dans cette troisième partie, les deux insectes I *et* I' *de la première partie et les forces* $m\vec{F}$ *et* $m\lambda\vec{k}\times\vec{V}(P)$ *de la seconde partie sont supprimés. On rappelle que la pesanteur n'est pas prise en considération.*

La plaque (S) est encore assujettie par une liaison bilatérale à glisser sans frottement sur le plan $x_1O_1y_1$.

Au point P défini par $\overrightarrow{GP} = a\,\vec{i}$ (a longueur donnée) est placée une surcharge qui est larguée (c'est-à-dire éjectée avec une vitesse nulle relativement à la plaque) de façon continue selon une loi donnée : on note $\mu(t)$ la masse de la surcharge encore attachée en P à l'instant t [μ fonction donnée, positive, dérivable, décroissante de t]. On suppose que le largage se fait sans intervention de forces extérieures et que la matière une fois larguée n'exerce aucune action sur (S).

1° Écrire les équations du mouvement de (S) [on montrera en particulier que r reste constant].

2° On prend : $$\mu(t) = \frac{m(\alpha - \beta t)}{1 - \alpha + \beta t} \qquad 0 \leqslant t < \frac{\alpha}{\beta}$$

où α et β sont des constantes données ($0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$).

On suppose que les axes O_1x_1, O_1y_1 sont les positions des axes Gx, Gy respectivement à l'instant $t = 0$, et que la plaque (S) est lancée à cet instant dans les conditions suivantes : sa vitesse angulaire de rotation r est différente de zéro et le vecteur vitesse de G dans le repère $O_1x_1y_1z_1$ est $-\alpha a r\vec{j}$.

Étudier le mouvement de la plaque (S) pour t variant de 0 à $+\infty$; déterminer la roulante et la base de ce mouvement.

Le sujet se distinguait assez nettement de ceux qui avaient été proposés précédemment.

Il a été inspiré par des travaux assez récents concernant l'étude de la stabilité d'un mouvement au moyen de la méthode de Liapounoff (Partie II) et le mouvement d'un corps de masse variable (Partie III).

La première partie, accessible à un bon étudiant du premier cycle, était destinée à contrôler les connaissances des candidats sur les notions fondamentales de Mécanique générale. Les résultats sont décevants et ce n'est que grâce à un barème particulièrement généreux que quelques candidats ont atteint ou dépassé la moyenne.

I

1° - (Σ) n'est soumis à aucune force extérieure. G a donc un mouvement rectiligne uniforme et $\vec{\sigma}$ reste constant.

2° - On a :

$$\vec{\sigma} = \frac{m\rho^2}{2}(p\vec{i} + q\vec{j}) + m\rho^2 r\vec{k} + \overrightarrow{MGI} \times \vec{V}(I) + \overrightarrow{MGI'} \times \vec{V}(I')$$

[$\vec{V}(I)$ = vitesse de I dans son mouvement autour de G, soit $\frac{dz}{dt}\vec{k} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{GI}$; $\vec{V}(I') = -\vec{V}(I)$].

En exprimant que la dérivée temporelle absolue de $\vec{\sigma}$ est nulle, on obtient ainsi, en utilisant le repère $Gxyz$:

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)p' + 4Mzz'p + \left(\frac{m\rho^2}{2} - 2Mz^2\right)qr = 0 \\ \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)q' + 4Mzz'q - \left(\frac{m\rho^2}{2} - 2Mz^2\right)rp = 0 \\ m\rho^2 r' = 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne $r = r_0$ et par des combinaisons simples :

$$\left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)\sqrt{p^2+q^2} = cte \quad ; \quad \mathrm{Arctg}\,\frac{q}{p} = r_0 \int \frac{\frac{m\rho^2}{2} - 2Mz^2}{\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2}\, dt + cte$$

3° - Les réactions se calculent immédiatement en appliquant le principe fondamental aux insectes I et I'.

4° - En posant $\sigma = \|\vec{\sigma}\|$, on a facilement :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)p = \sigma \sin\theta \sin\varphi \\ \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)q = \sigma \sin\theta \cos\psi \\ m\rho^2 r_0 = \sigma \cos\theta \end{array}\right.$$

θ est donc constant ; φ est déterminé par son sinus et son cosinus ; enfin, on a :

$$\psi = \sigma \int \frac{dt}{\frac{m\rho^2}{2} + 2\,\mathrm{M}z^2} + cte\,,$$

intégrale qui se ramène à celle qui donne Arc tg $\frac{q}{p}$.

II - A

1° - Les théorèmes généraux donnent aisément les équations :

$$u' - rv = \mathrm{X} - \lambda(v + ar)\;;\; v' + ru = \mathrm{Y} + \lambda u\;;\; \rho^2 r' = a(\mathrm{Y} + \lambda u)$$

2° - a) La condition de possibilité est $\mathrm{Y} = 0$. Il s'agit de rotations uniformes,

car $u = 0\,,\; v = \dfrac{\mathrm{X} - \lambda ar}{\lambda - r}\;;\; r = Cte \neq \lambda$

b) La condition de possibilité est $\mathrm{X} = a\lambda^2$

Pour $\mathrm{Y} = 0$, on obtient des rotations uniformes.

Pour $\mathrm{Y} \neq 0$, on a : $u = -\dfrac{\mathrm{Y}}{\lambda}\;;\; v = \mathrm{Y}t + Cte\;;\; r = \lambda$.

La roulante est la droite $y = -\dfrac{\mathrm{Y}^2}{\lambda^2}$ parcourue avec la vitesse $\dfrac{\mathrm{Y}}{\lambda}$; la base est un cercle de rayon $\dfrac{|\mathrm{Y}|}{\lambda^2}$.

II - B

1° - **Question préliminaire**

a) Il suffit de savoir qu'une forme quadratique définie positive est minorée par $\mathrm{K}\,\|x\|^2$ ou K est une constante convenable strictement positive.

b) A l'agrégation masculine un seul candidat a abordé cette question, avec succès d'ailleurs.

Soit $\epsilon > 0$, inférieur à H. Sur $\|x\| = \epsilon$, W admet une borne inférieure $\mathrm{W}_m > 0$ et atteinte. W étant nulle à l'origine et continue en ce point, à $\mathrm{W}_m > 0$, on peut faire correspondre $\eta > 0$ et $< \epsilon$ tel que $\|x(0)\| < \eta$ entraîne $0 < \mathrm{W}[x(0)] < \mathrm{W}_m$. Soit alors $x(t)$ la solution du système, unique en vertu des hypothèses, «partant» de $x(0)$ à l'instant $t = 0$. Sur la «trajectoire» du point $x(t)$, $\mathrm{W}[x(t)] = \mathrm{W}[x(0)] < \mathrm{W}_m$; cette trajectoire ne peut donc atteindre la sphère $\|x\| = \epsilon$ où $\mathrm{W}(x) \geq \mathrm{W}_m$. Donc $\|x(t)\|$ reste inférieur à ϵ pour toute valeur de t.

2° - Le mouvement $\mathfrak{M}$ est caractérisé par $r_0 = 0\,,\; \mu_0 = -\dfrac{\mathrm{Y}}{\lambda}\,,\; v_0 = \dfrac{\mathrm{X}}{\lambda}$.

3°) et 4°) - On obtient immédiatement $(\mathscr{S})$ qu'on linéarise aisément.

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\rho^2 s^3 + [\lambda^2(a^2 + \rho^2) - a\mathrm{X}]\,s + a\lambda\mathrm{Y} = 0$$

Pour $\mathrm{Y} \neq 0$ ou pour $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{X} > \lambda^2\left(a + \dfrac{\rho_2}{a}\right)$, l'une de ces racines au moins a sa partie réelle strictement positive, ce qui entraîne l'instabilité.

5° - Pour $Y = 0$, $X < \lambda^2 (a + \frac{\rho^2}{a})$, les trois racines ont leur partie réelle nulle, ce qui ne permet pas de conclure. Le but de la question est précisément de montrer que la stabilité est assurée. Le système (S) admet les intégrales premières :

$$W_1 \equiv \Delta v - \frac{\rho^2}{a} r + \frac{\rho^2}{2a\lambda} r^2$$

$$W_2 \equiv (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + \frac{\rho^2(a\lambda^2 - X)}{a\lambda^2} r^2$$

$W \equiv W_2 + \nu W_1^2$ est aussi une intégrale première. D'après la question préliminaire, on obtient des conditions suffisantes de stabilité en exprimant que la forme quadratique qui constitue les termes de plus bas degré de W est définie positive. Ces conditions s'écrivent :

$$\nu + 1 > 0 \;;\; \frac{\nu}{\nu + 1} > \frac{a(X - a\lambda^2)}{\lambda^2 \rho^2}$$

En vertu de l'hypothèse, le second membre de la deuxième inégalité est strictement inférieur à 1. Par suite, les inégalités sont remplies pour tous les nombres ν supérieurs à un certain nombre $\nu_0 > -1$ et qu'on peut déterminer graphiquement.

III

Cette partie a été abordée par de nombreux candidats. Presque tous ont commis la grave erreur d'appliquer froidement les théorèmes généraux à un corps de masse variable. Quelques-uns d'entre eux ont bien considéré un système conservant une masse constante, mais leur raisonnement, bien que conduisant à une équation exacte, a été insuffisant ou incorrect. Rares sont les candidats (deux à l'agrégation masculine) qui ont donné une démonstration valable.

1° - Soit $\vec{R}(t)$ la réaction de la plaque sur la surcharge à l'instant t.

Les théorèmes généraux appliqués à la plaque seule donnent :

$$m\vec{\Gamma}(G) = -\vec{R}(t) \;;\; m\rho^2 r'\vec{k} = -\vec{GP} \times \vec{R}(t)$$

La quantité de mouvement absolue de la surcharge à l'instant t est $\mu(t)\,\vec{V}(P)(t)$.

A l'instant $t + \Delta t$($\Delta t > 0$ petit), le système constitué par les mêmes éléments matériels se décompose en deux parties : le reste de la surcharge de quantité de mouvement absolue

$\mu(t + \Delta t)\ \vec{V}(P)(t + \Delta t)$ et la matière éjectée entre les instants t et $t + \Delta t$), de masse totale $\mu(t) - \mu(t + \Delta t)$, dont les éléments ont une vitesse de la forme $\vec{V}(P)(t) + \vec{o}(\Delta t)$ ($\vec{o}(\Delta t)$ étant un vecteur tendant vers zéro avec Δt) si l'on néglige les interactions de ces éléments et dont la quantité de mouvement absolue peut s'écrire par conséquent :

$$[\mu(t) - \mu(t + \Delta t)]\ [\vec{V}(P)(t) + \vec{o}(\Delta t)]$$

On a donc l'équation :

$$\lim_{\Delta t \to o} \frac{\mu(t + \Delta t)\ \vec{V}(P)\ (t + \Delta t) - \mu(t)\ \vec{V}(P)(t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to o} \frac{\mu(t + \Delta t) - \mu(t)}{\Delta t} [\ \vec{V}(G)(t) + \vec{o}(\Delta t)\ ] = \vec{R}(t)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)\vec{V}(P)(t)] - \frac{d\mu}{dt}\ \vec{V}(P)(t) = \vec{R}(t)$$

Ou enfin :

$$\mu(t)\ \vec{\Gamma}(P) = \vec{R}(t)$$

(Bien entendu, une vitesse relative d'éjection non nulle aurait provoqué l'apparition d'un terme supplémentaire au second membre). L'élimination de $\vec{R}(t)$ fournit les deux équations :

$$m\vec{\Gamma} + \mu(t)\vec{\Gamma}(P) = 0 \; ; \; m\rho^2 r'\vec{k} = \mu(t)\, a\, \vec{i} \times \vec{\Gamma}(P)$$

qui jointes à la relation :

$$\vec{\Gamma}(P) = \vec{\Gamma}(G) - ar^2\vec{i} + ar'\vec{j} \; ,$$

donnent :

$$r = constante \; ; \; [\, m + \mu(t)\,]\; \vec{\Gamma}(G) - \mu(t)\, ar^2 \vec{i} = 0$$

2° - Le mouvement se décompose en deux phases :

1re phase : $0 \leqslant t < \dfrac{\alpha}{\beta}$.

On a : $\vec{\Gamma}(G) = ar^2(\alpha - \beta t)\,\vec{i}$

Donc : $u = a\beta(\cos rt - 1)$; $v = a\beta(rt - \sin rt) - ar\alpha$

La roulante et la base sont des arcs de cycloïde.

2e phase : $t > \dfrac{\alpha}{\beta}$

La plaque est libre ; r reste constant G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Le mouvement est donc un mouvement cycloïdal uniforme.

Répartition des notes

HOMMES

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présents	40	53	52	43	27	8			
Admissibles	0	4	15	29	23	8			
Admis	0	0	4	13	11	4			

FEMMES

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présentes	15	32	22	15	18	8	2		1
Admissibles	0	3	4	10	11	8	2		1
Admises	0	0	1	3	3	5	2		1

COMPOSITION DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

I

$\mathbf{R}^2$ est muni de la distance euclidienne et considéré comme espace affine et métrique. Un point de $\mathbf{R}^2$ est défini par ses coordonnées (x, y).

Soit Ω l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^2$, Π l'ensemble $[0,\pi[\times\mathbf{R}$. L'application qui, à tout couple (u, v), élément de Π, associe l'élément $\omega(u, v)$ de Ω d'équation $x\cos u + y\sin u = v$, est une bijection de Π sur Ω. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des images dans Ω des boréliens de Π et soit μ la mesure image de la mesure de Borel-Lebesgue de Π par cette bijection.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties convexes compactes de $\mathbf{R}^2$. Étant donné $A \in \mathcal{C}$, on pourra admettre que l'ensemble Ω_A des droites qui coupent A est mesurable dans $(\Omega, \mathcal{S})$.

On admettra que toute partie A de $\mathcal{C}$ possède la propriété suivante : à toute valeur de u correspondent deux valeurs de v : $v_1(u)$ et $v_2(u)$, $v_1(u) \leqslant v_2(u)$ telles que toute droite $\omega(u, v)$ coupe A si et seulement si $v \in [v_1(u), v_2(u)]$.

1° Soit $\mathcal{C}^*$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$, dont la frontière est une courbe fermée simple rectifiable; pour $A \in \mathcal{C}^*$, calculer l'intégrale

$$\int_{[0,\pi[} [v_2(u) - v_1(u)]\, du$$

en fonction de la longueur L_A de la frontière de A; en déduire que la mesure dans $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ de l'ensemble des droites qui coupent A est L_A.

(On pourra d'abord montrer que l'intégrale est indépendante de l'origine O et par suite la calculer en supposant que $O \in A$, ce qui conduira à une intégrale telle que : $\int_{[0,2\pi[} w(u)\, du$ avec $w(u) \geqslant 0$. On pourra dorénavant supposer que la frontière de A est une courbe « fermée simple rectifiable »).

N.B. — *Le candidat qui ne saura pas résoudre cette question préliminaire en admettra le résultat pour traiter la suite du problème.*

A étant un élément déterminé de $\mathcal{C}^*$, dont la frontière a pour longueur L_A, si Ω_A est l'ensemble des droites qui coupent A, $\mathcal{S}_A$ la trace de $\mathcal{S}$ sur Ω_A et P_A la restriction à $(\Omega_A, \mathcal{S}_A)$ de la mesure $\frac{1}{L_A}\mu$, $(\Omega_A, \mathcal{S}_A, P_A)$ est un espace probabilisé. *Cet espace sera l'espace de référence qui sera utilisé dans les deux premières parties du problème.*

Si B est une partie de $\mathbf{R}^2$ telle que l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^2$ appartenant à Ω_A qui coupent B est un événement dans $(\Omega_A, \mathcal{S}_A)$, on notera cet événement E_B.

2° *a.* Montrer que, si $B \in \mathcal{C}^*$ et $B \subset A$, on a : $P_A(E_B) = \frac{L_B}{L_A}$, où L_B est la longueur de la frontière de B.

b. Soit B et B′ deux éléments de $\mathcal{C}^*$ inclus dans A tels que $B \cap B' \neq \varnothing$, C le plus petit ensemble convexe de $\mathbf{R}^2$ qui contient B et B′ (enveloppe convexe de B et B′) et L_B, $L_{B'}$, L_C les longueurs respectives des frontières de B, B′ et C. Montrer que :

$$P_A(E_B \cap E_{B'}) = \frac{L_B + L_{B'} - L_C}{L_A}$$

c. Soit $B \in \mathscr{C}^*$ tel que $B \cap A \neq \varnothing$, C l'enveloppe convexe de B et A, L_B et L_C les longueurs respectives des frontières de B et C. Montrer que :

$$P_A(E_B) = \frac{L_A + L_B - L_C}{L_A}$$

d. Soit deux disques fermés B et B' inclus dans A, de rayons respectifs r et r' $(r > 0,\ r' > 0)$ et dont la distance des centres est d. Calculer la probabilité pour qu'une droite coupe ces deux disques *à la fois*. On distinguera les deux cas : $d \leqslant r + r'$ et $d > r + r'$. Dans ce second cas, on pourra introduire les tangentes communes intérieures aux cercles frontières des disques.

3° *a.* Étant donnés dans A deux points m et n dont la distance est l, trouver la probabilité pour qu'une droite coupe le segment $[m, n]$ en fonction de l. Comparer le résultat ainsi obtenu à celui de I 1°.

b. Soit G un arc de courbe inclus dans A d'extrémités a et b tel que $G \cup [a, b]$ soit la frontière d'un élément de $\mathscr{C}^*$; on désigne par L la longueur de G et par l la distance entre a et b.

Quelle est la probabilité pour qu'une droite coupe G en deux points distincts ou soit « tangente » à G en laissant G toute entière d'un même côté? pour qu'elle coupe G en un point et un seul?

c. Soit B un disque fermé inclus dans A, de rayon r $(r > 0)$ et de centre b, m et n deux points de A situés sur un même diamètre de B et i le milieu de $[m, n]$. On appelle δ la distance entre b et i et 2ρ la longueur de $[m, n]$ $(\rho > 0)$.

Calculer en fonction de r, δ et ρ la probabilité pour qu'une droite coupe *à la fois* B et le segment $[m, n]$.

Cas particulier : $\delta = 0$, $0 < \rho < r$: expliquer pourquoi ce résultat donne la solution du problème suivant (problème de l'aiguille de Buffon) : on lance *au hasard* une « aiguille » de longueur 2ρ sur le « plan » sur lequel sont tracées les droites parallèles $x = 2nr$, $n \in \mathbf{Z}$; quelle est la probabilité pour que « l'aiguille » coupe une quelconque de ces parallèles? Quelle est l'hypothèse mathématique correspondant à l'expression « *au hasard* »?

II

Dans cette seconde partie, l'espace probabilisé est toujours $(\Omega_A, \mathscr{S}_A, P_A)$, mais on particularise en prenant pour A le disque :

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

1° B est un disque fermé de rayon r $(r > 0)$ et tel que la distance de son centre à l'origine O soit $2d$ $(d \geqslant 0)$.

Calculer $P_A(E_B)$ dans les différents cas possibles.

2° Si $m = (\alpha, 0)$ et $n = (\beta, 0)$ sont deux éléments de $\mathbf{R}^2$, calculer en fonction de α et β la probabilité pour qu'une droite coupe le segment $[m, n]$.

3° On note $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie sur Ω de la manière suivante : deux éléments ω et ω' de Ω sont équivalents si et seulement si ou bien ω et ω' coupent la droite $y = 0$ en un même point ou bien ω et ω' sont parallèles (au sens large) à la droite $y = 0$.

Soit $\mathscr{T}$ la sous-tribu des parties S de $\mathscr{S}$ telles que, si ω est un élément de S, tout élément ω' de Ω, $\mathscr{R}$-équivalent à ω, appartient aussi à S; soit $\mathscr{T}_A$ la trace de $\mathscr{T}$ sur Ω_A.

B_r étant le disque $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2, r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\}$, calculer un représentant de la probabilité conditionnelle $P(E_{B_r} \mid \mathcal{C}_A)$.

Trouver le lien entre cette probabilité conditionnelle et la probabilité pour qu'une droite ω coupe B_r sachant qu'elle passe par un point $m = (\alpha, 0)$ donné.

4° On suppose que le rayon r du disque $B_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ satisfait à $0 < r \leqslant 1$. La longueur de la corde découpée sur une droite ω par B_r est une variable aléatoire Z_r dont on demande de déterminer la fonction de répartition. Cette loi est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Borel-Lebesgue? Calculer l'espérance et la variance de Z_r.

En prenant $r = 1 - \frac{1}{n}$, on fait correspondre à tout entier $n > 1$ une variable aléatoire $Z'_n = Z_{1-\frac{1}{n}}$. La suite $\{Z'_n\}$ converge-t-elle en probabilité lorsque n tend vers l'infini?

III

On suppose désormais que la distribution de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{S})$, donc sur Π, résulte de la construction suivante :

t étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-1, +1]$, la droite $x = t$ rencontre le demi-cercle :

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, \ y > 0\} \cup \{(1,0)\}$$

en un point h; $\cos u$, $\sin u$, où $u \in [0, \pi[$, sont les coordonnées de h ; v étant un nombre réel quelconque, la perpendiculaire à Oh en k telle que $\overrightarrow{Ok} = v\overrightarrow{Oh}$ est une réalisation d'un élément de Ω.

La distribution de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{S})$ est alors parfaitement déterminée par la distribution du couple (T, V), t et v étant des réalisations de T et de V; u est une réalisation de U.

1° Quelle relation lie les variables U et T?

2° Quelle serait la loi du couple (T, V) qui induirait sur $(\Omega, \mathcal{S})$ la probabilité dont la restriction à $(\Omega_A, \mathcal{S}_A)$ est P_A, lorsque A est le disque unité de la seconde partie?

3° Dans cette question, on suppose les variables T et V indépendantes, T uniformément distribuée sur $]-1, +1]$, V symétrique sur $\mathbf{R}$ et de fonction de répartition F. On pose

$$\Phi(x) = \int_0^x F(v)\, dv.$$

a. Montrer que U admet une densité et trouver cette densité γ.

b. Quelle est la probabilité $H(a)$ pour qu'une droite ω coupe la demi-droite $]-\infty, a] \times \{0\}$?

c. Montrer que l'application H de $\mathbf{R}$ dans $[0,1]$, qui à a associe $H(a)$, est la fonction de répartition d'une distribution de probabilité. Cette distribution a-t-elle une densité?

d. Calculer H dans le cas où V admet une densité f telle que

$$f(v) = \frac{1}{2} e^{-|v|}.$$

Rapport sur la composition de Probabilités et Statistiques

Comme les années précédentes, le problème ne se rattache à aucune question particulière de Probabilités, mais fait appel à un très large éventail de notions figurant au programme de l'Agrégation. D'une longueur raisonnable, il est assez simple, une bonne partie pouvant être traitée en sachant seulement quelques résultats élémentaires qui concernent la théorie de la mesure et la définition d'un espace probabilisé ; toutefois certains candidats ont pu être déroutés par le type un peu particulier des espaces de Probabilités envisagés, qui l'aurait fait qualifier, il y a quelques années, de problème de Probabilités géométriques.

Il faut déplorer cependant :

- la méconnaissance fréquente de quelques propriétés géométriques élémentaires indispensables pour la résolution du problème : il est inadmissible dans un tel concours d'écrire des formules comme $ds = \rho(\theta)\, d\theta$ en coordonnées polaires, d'être apparemment dépassé par le calcul de la longueur d'une corde d'un cercle en fonction de sa distance au centre, d'ignorer ce qu'est une enveloppe convexe, voire un ensemble convexe, et de concevoir l'enveloppe convexe de deux cercles comme leur union ou comme un autre cercle tangent aux deux cercles donnés, d'être enfin aussi maladroit ou étonnant dans des calculs de longueurs de courbes formées d'arcs de cercles et de portions de tangentes...
- l'incapacité de trop de candidats à conduire correctement un raisonnement ou à appliquer une théorie : le fait que presque tous les candidats n'aient pas su trouver un représentant d'une probabilité conditionnelle demandé en II 3°) semble à cet égard très significatif.

Dans I-1°, il fallait établir un résultat utilisé par la suite ; mieux valait l'admettre, comme l'énoncé y invitait formellement, que d'écrire d'énormes bêtises ! De trop nombreux candidats ne sont même pas capables de montrer comment le fait de prendre $0 < A$ permet de transformer :

$$\int_{[0,\pi]} [v_2(u) - v_1(u)]\, du \quad \text{en} \quad \int_{[0,2\pi]} w(u)du$$

en posant :

$$w(u) = v_2(u) \text{ pour } 0 \leqslant u < \pi \qquad w(u) = -v_1(u - \pi) \text{ pour } \pi \leqslant u < 2\pi$$

Serait-elle aussi du passé la remarque que la considération des équations des droites d'appui sous la forme $x \cos u + y \sin u = w(u)$ revient à se donner la frontière du convexe par son équation d'Euler et que par conséquent sur un arc enveloppe on a : $ds = [\, w(u) + w''(u)\,]\, du$ lorsque w'' existe ?

Mais il est possible également d'arriver au résultat en remarquant que, θ et ρ étant des coordonnées polaires de M sur la frontière C, on a, si la tangente en M existe,

$$\int_{[0,2\pi]} w(u)du = \int_{C} \rho \sin V\, (d\theta + dv) \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} v = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho}$$

en posant $V = \frac{\pi}{2} + u - \theta$

Dans I,2° les notations les notations sont soigneusement précisées pour éviter toutes confusions, trop souvent cette précaution n'a servi à rien.

Ainsi, écrire dans I-2 c) :

$$P_A(E_B) = P_A(E_A \cap E_B) = P_A(E_A) + P_A(E_B) - P_A(E_A \cup E_B))$$

ne prouve absolument rien, puisque ;

$$E_A \cup E_B = E_A$$

alors qu'il faut se servir de :

$$P_A(E_B) = P_A(\Omega_A \cap \Omega_B) = P_A(\Omega_A) + P_A(\Omega_B) - P_A(\Omega_A \cup \Omega_B)$$

Quant à la confusion entre B, Ω_B et E_B, elle est trop grossière et pourtant elle a été faite plus d'une fois.

On s'imagine aussi que : $\Omega_A \cap \Omega_B = \Omega_{A \cap B}$!

On voit aussi affirmer par plusieurs candidats, dans I 2-b) que si $B \cap B' \neq \phi$, $B \cup B'$ est l'enveloppe convexe de B et B' et que par conséquent : $P_A(\Omega_B \cup \Omega_{B'}) = P_A(\Omega_{B \cup B'}) = \frac{L_c}{L_A}$!

Heureusement, quelques copies seulement contiennent de telles énormités.

Mais beaucoup ont essayé de montrer que $\Omega_B \cup \Omega_{B'} = \Omega_c$ si $B \cap B' \neq \phi$ sans y parvenir de façon rigoureuse et souvent en employant des méthodes compliquées. Il suffisait de revenir aux définitions. Manifestement $\Omega_B \cup \Omega_{B'} \subset \Omega_c$. Il suffit donc de montrer que si $B \cap B' \neq \phi$ et si une droite coupe C elle coupe B ou B', ou ce qui revient au même, si une droite coupe C sans couper ni B ni B', c'est que $B \cap B' = \phi$.

Soit D une droite qui coupe C mais qui ne coupe ni B ni B' ; il existe donc :

$$b \in B,\ b' \in B',\ \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \lambda' \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lambda + \lambda' = 1 \text{ tel que le point } \lambda b + \lambda' b' \text{ appartient à } D \cap C.$$

Si $f(m) = 0$ est l'équation de D, on a $f(\lambda b + \lambda' b') = 0$ donc $\lambda f(b) + \lambda' f(b') = 0$

Puisque ni b ni b' n'appartiennent à D, aucun des 4 nombres λ, λ', $f(b)$, $f(b')$ n'est nul. λ et λ' étant positifs, $f(b)$ et $f(b')$ sont donc de signes contraires, c'est-à-dire que b et b' dont de part et d'autre de D. Comme D ne coupe ni B, ni B', D sépare B et B' donc $B \cap B' = \phi$.

I-2-d) Beaucoup de candidats n'ont donné qu'une réponse dans le cas $d < r + r'$, alors qu'il se subdivisait en deux : $d < |r - r'|$ et $|r - r'| < d < r + r'$.

Le cas $d > r + r'$ constitue un problème nouveau dont l'étude n'est pas demandée dans le cas général qui correspond à $B \cap B' = \phi$.

Il se ramène au cas précédemment traité de deux ensembles d'intersection non vide, en remarquant que l'ensemble des droites qui coupent les deux cercles B et B' à la fois est, à un ensemble de mesure nulle près, l'ensemble des droites qui coupent à la fois les enveloppes convexes fermées C et C' de $B \cup \{t\}$ et $B' \cup \{t'\}$ où t désigne le point commun aux tangentes intérieures à B et B'. On peut baser une démonstration de cette propriété sur les propositions suivantes : la frontière de C (resp. C') est constituée d'un arc du cercle B (resp. B') et de deux segments de droite, qu'on appellera ses parties rectilignes ; si une droite ne passant pas t coupe les deux parties rectilignes de la frontière de C (resp. C'), elle ne peut couper C' (resp. C) ; une droite ne passant par t qui coupe C' (resp. C) et une partie rectiligne de la frontière C (resp. C') coupe B (resp. B') ; (en effet, une telle droite ne peut être ni tangente à B, ni droite d'appui de C et elle ne peut recouper l'autre partie rectiligne de C ; par conséquent, elle coupe la frontière de C suivant l'arc du cercle B, c'est-à-dire qu'elle coupe B). Il suffit, en outre, de remarquer que l'ensemble des droites passant par un point donné est de mesure nulle. Cette remarque est également essentielle dans la question 3-b.

Le fait, que dans I une distinction soit établie entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$ et que le cas des segments fasse l'objet de la question I-3-a), n'a pas intrigué de nombreux candidats qui, dans la réponse à cette question, ont pris l pour longueur du segment et trouvé $\frac{l}{L_A}$ pour probabilité de section par une droite, alors qu'il faut prendre $2l$ comme longueur de frontière. Cela se prouve soit en reprenant le calcul indiqué dans I-1), soit en considérant le segment fermé comme limite d'une suite décroissante de convexes, par exemple, la partie incluse dans A des rectangles de côtés parallèles à $[m,n]$ et dont m et n sont les milieux des deux autres côtés de longueur $\frac{2}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Il ne semblait pas, a priori, que l'étude des cas particuliers figurant en I-2-d), I-3-c), II-1er), II-2^{e}), dusse présenter des difficultés. Or, les copies montrent que trop de candidats ne savent pas distinguer nettement -et rationnellement- les cas possibles et présenter les calculs et les résultats sous une forme nette et simple. Bien peu de candidats ont pensé donner une certaine unité dans l'étude de I-3-c) ou II-2^{e}), en utilisant le fait que $E_{[m,n]}$ et $E_{[m',n']}$ sont deux événements dont l'intersection est de probabilité nulle si $[m,n]$ et $[m',n']$ sont portés par une même droite et n'ont au plus qu'une extrémité commune. Cela permet en effet de se ramener par exemple au cas où les segments ont pour origine le centre du cercle A.

Signalons en passant que le problème de l'aiguille de Buffon semble ignoré de beaucoup de candidats Ne pas donner avec précision l'hypothèse mathématique correspondant à l'expression «au hasard» dans ce problème traduit une méconnaissance totale de ce qu'est un modèle probabiliste.

A propos de la partie II, il faut insister particulièrement sur le fait que la question 3 n'a pas été résolue par presque tous les candidats.

Certains ont écrit jusqu'à une et deux pages sur la théorie des Probabilités conditionnelles, mais n'ont pas été capables de la mettre en pratique. Or, une idée simple aurait pu les guider : la Probabilité conditionnelle se définit comme un intégrand de Radon Nikodyn $\mathcal{T}_A$ mesurable, $\mathcal{T}_A \subset \mathcal{S}_A$. Or, un cas simple où il est facile d'obtenir une telle fonction (cf. l'étude des couples de variables aléatoires) est celui où Ω' est un espace produit, $\Omega' = \Omega'_1 \times \Omega'_2$ où $\mathcal{S}'$, tribu des ensembles mesurables sur Ω', est un produit $\mathcal{S}'_1 \oplus \mathcal{S}'_2$, $\mathcal{S}'_1$ et $\mathcal{S}'_2$ étant des tribus de parties de Ω'_1 et Ω'_2 et où la sous-tribu $\mathcal{T}'$ de $\mathcal{S}'$ par rapport à laquelle l'intégrand doit être mesurable, est $\mathcal{S}'_1 \oplus \{\Omega'_1\}$ (resp. $\{\Omega'_1\} \oplus \mathcal{S}'_2$). En effet, la $\mathcal{T}'$ - mesurabilité d'une fonction s'exprime alors par le fait qu'elle ne dépend que de la variable ω'_1 (resp. ω'_2).

Par conséquent, on peut se demander s'il existe une bijection de Ω dans un certain espace $\Omega' = \Omega'_1 \times \Omega'_2$ telle que les images des éléments de $\mathcal{T}$ soient des ensembles du type $S'_1 \times \Omega'_2$, $S'_1 \in \mathcal{S}'_1$ (ou $\Omega'_1 \times S'_2$, $S'_2 \in \mathcal{S}'_2$).

Or $\omega\,(u, v)$ et $\omega\,(u'v')$ sont équivalents si $u' = u = \frac{\pi}{2}$, ou si $u \neq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{v}{\cos u} = \frac{v'}{\cos u'}$.

Par conséquent, si $T \in \mathcal{T}$ et si $\omega\,(u, v) \in T$, $u \neq \frac{\pi}{2}$

$$\{\omega'(u',v') : \frac{v'}{\cos u'} = \frac{v}{\cos u}\} \subset T$$

Ceci suggère d'effectuer la transformation ϕ de Ω dans $\Omega' = [0,\pi[\times \mathbb{R}$ telle que si ω a pour image (u, v) dans Π,

$$\phi\,(\omega) = (u, \frac{v}{\cos u}) \quad \text{si } u \neq \frac{\pi}{2}, \quad \phi\,(\omega) = (\frac{\pi}{2}, v) \quad \text{si } u = \frac{\pi}{2}.$$

donc $\omega \longmapsto \phi(\omega) = \omega' = (\omega'_1, \omega'_2)$ avec

$$\omega'_1 = u, \ \omega'_2 = v \ \text{si } u = \frac{\pi}{2} \ \text{et} \quad \omega'_2 = \frac{v}{\cos u} \quad \text{si } u \neq \frac{\pi}{2}$$

Cette transformation est bijective et mesurable.

Les images des éléments de $\mathcal{T}$ par cette transformation sont des ensembles du type :
$\left([0,\pi[\times I\right) - \left(\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}\right)$, où I est un borélien quelconque de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$.

Si h est une fonction numérique $\mathcal{T}$ mesurable sur Ω, alors $h = h' \circ \phi$ où h est une fonction numérique sur Ω' constante sur $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$ et sur tout ensemble $([0,\pi[- \{\frac{\pi}{2}\}) \times \{v'\}$

Le fait que $\mu(\{\omega : u = \frac{\pi}{2}\}) = 0$ permet d'écrire que la mesure des images Υ de μ par ϕ a pour densité sur Ω' la fonction $(\omega'_1, \omega'_2) \longmapsto (\cos \omega'_1)$.

La mesure Υ_A de μ_A par ϕ a donc pour densité $\frac{\cos \omega'_1}{2\pi}$ sur $\phi(\Omega_A)$ et 0 sur $\complement_{\pi'} \phi(\Omega_A)$

Il suffit enfin de remarquer qu'un intégrand n'étant défini qu'à un ensemble de mesure nulle près, on peut chercher, au lieu de h', une fonction h'' sur Ω' qui ne dépend que de ω'_2.

La question se ramène à un simple changement de variables dans une intégrale !

Dans II-4), si $\omega \in \Omega_A - \Omega_{Br}$, $Z_r(\omega) = 0$

si $\omega \in \Omega_{Br}$ et si $\omega = \omega(u, v)$, $Z_r(\omega) = 2\sqrt{r^2 - v^2}$

Manifestement $P(Z_r < 0) = 0 \quad P(Z_r > 2r) = 0$

Si $0 \leqslant z \leqslant 2r$, l'événement $Z_r < z$ est l'événement $V > \sqrt{r^2 - \frac{z^2}{4}}$

On obtient ainsi facilement la loi de Z_r qui n'est pas absolument continue si $r < 1$. (masse $(1 - r)$ en 0).

Lorsqu'on prend $r = 1 - \frac{1}{n}$, on voit immédiatement qu'en chaque ω, $Z'_n(\omega)$ converge simplement vers $Z'(\omega)$ longueur de la corde découpée sur ω par A.

Il est alors facile de montrer que :

$$\forall \omega \in \Omega_A, \quad 0 < Z'(\omega) - Z'_n(\omega) < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

d'où la convergence de Z'_n vers Z' et par suite, la convergence en probabilité.

On peut également s'appuyer uniquement sur le fait que : $\forall \omega$, $Z'(\omega) > Z'_n(\omega)$.

$$\text{d'où} \quad \int |Z'(\omega) - Z'_n(\omega)| \, dP_A(\omega) = \int (Z'(\omega) - Z'_n(\omega)) \, dP_A(\omega)$$
$$= E(Z') - E(Z'_n).$$

De la convergence de $E(Z'_n)$ vers $E(Z')$, on déduit alors la convergence en moyenne, donc la convergence en probabilité de Z'_n vers Z'.

A ce sujet, on a trouvé dans les copies trop d'affirmations sans preuve (et à tort) que la loi obtenue est absolument continue et aussi une ignorance presque totale de la convergence en probabilité. Une seule candidate sur 178 a mené adroitement la démonstration jusqu'au bout en utilisant le théorème de Markov.

La partie III montre nettement l'insuffisance des candidats dans le domaine du Calcul intégral. Ceci rejoint la remarque faite dans II-3^e), à propos du changement de variables dans les intégrales.

La question III-3^e) demandait un peu de soin pour sa résolution.

Dans III-3^e-b), on prend évidemment le mot «coupe» dans son sens strict (comme dans II-3^e) : deux droites se coupent si elles ont un point commun et un seul. Cette 3^e question revient au fond à l'étude de l'application de $\left([o, \pi[- \{\frac{\pi}{2}\} \right) \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à (u, v), $\frac{v}{\cos u}$. L'événement $V = \frac{\pi}{2}$ étant presque impossible, on obtient bien une distribution de probabilité. Devrait-il être besoin ici de répéter encore que les égalités «$T = \cos u$» et «$u = A u \cos T$» ne sont pas équivalentes, non plus que les inégalités «$\frac{V}{T} < a$» et «$V < a T$» ou qu'une densité de probabilité ne saurait être négative ?

Répartition des notes

HOMMES	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présents	21	92	58	45	30	15	8	2	3
Admissibles	0	3	13	27	25	14	8	2	3
Admis	0	1	2	12	17	13	8	2	3

Chez les hommes, le nombre des candidats probabilistes est passé de 165 en 1970 à 274, ce qui traduit un accroissement relatif très net. La moyenne générale est passée de 8 à 9,42 sur 40. On note cependant, par rapport à 1970, un nombre sensiblement égal de copies méritant 25 ou plus sur 40 et un nombre relativement plus faible de basses notes inférieures à 5 sur 40. L'épreuve de Probabilités est ainsi davantage préparée ; on souhaiterait cependant voir croître le pourcentage des bonnes et très bonnes copies.

FEMMES	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présentes	10	52	29	42	24	12	4	3	2
Admissibles	0	1	4	19	20	12	4	3	2
Admises	0	0	1	7	13	8	4	3	1

Le nombre des candidates est passé de 129 à 178.

EPREUVES ORALES.

Les lecteurs trouveront à la fin de ce rapport des listes de textes proposés aux deux oraux. Ces listes, formées de quelques sujets anciens et de tous les sujets nouveaux introduits cette année à la suite de la modification du programme, ne sont que partielles ; elles complètent seulement les listes publiées dans les rapports de 1970.

De même, les observations tant générales que techniques qui figurent dans les rapports sur les deux concours précédents sont toujours valables. Les futurs candidats auront intérêt à lire ces rapports et à s'en inspirer au cours de leur préparation.

Les textes proposés dans les deux oraux étant légèrement différents, il paraît préférable de séparer les rapports des deux jurys.

ANALYSE

Rapport du Jury de l'Agrégation - Hommes

Remarques générales

1° - Le jury constate et regrette le peu de goût de la majorité des candidats pour les problèmes «concrets». Cela apparaît non seulement dans le choix qui est fait entre les deux sujets proposés -choix d'ailleurs entièrement libre, le jury n'ayant aucune préférence-; mais aussi dans la façon dont sont traités les sujets théoriques, dans la pauvreté et le peu d'intérêt des applications ou des exemples.

2° - Les candidats doivent savoir s'adapter aux situations qui leur sont proposées. Le jury admettrait fort bien que, ayant donné dans son plan un énoncé général dont l'étude risque d'être complexe et difficile, le candidat ne prépare pour l'exposé final qu'une démonstration simplifiée par l'intervention d'hypothèses supplémentaires, lorsque cette forme du théorème se trouve être la seule qui soit en fait utilisée. C'est le cas du théorème des accroissements finis, dont la forme la plus générale n'est pas toujours nécessaire, des théorèmes d'existence et d'unicité pour les équations différentielles, dont la démonstration se simplifie dans le cas particulier des «équations linéaires».

Remarques particulières

Elles sont relatives à certains sujets proposés.

- *Espaces compacts :* Certains candidats ne semblent connaître comme espaces compacts que les fermés, bornés de $\mathbb{R}^n$.
- *Espaces connexes :* La différence entre connexité et connexité par arcs n'est pas toujours connue.

Topologie de $\mathbb{C}$: Le rôle de la structure de corps de $\mathbb{C}$ n'est pas mis en évidence; rien n'est dit sur l'argument d'un nombre complexe.

- *Approximation des nombres réels :* Les candidats n'utilisent pas la théorie des fractions continues, qui figure pourtant au programme.
- *Limites :* Un exposé sur les limites demande un effort de synthèse que permet l'introduction dans le programme de notions de topologie générale. Il ne doit pas se réduire à une juxtaposition de paragraphes entre lesquels n'est établi aucun rapport ; il doit comporter des indications sur les méthodes permettant d'établir l'existence des limites.

Un candidat a traité ce sujet sans parler du critère de Cauchy ; d'autres ne savent pas appliquer ce critère pour la limite d'une fonction en un point ; d'autres parlent de limites de nombres réels sans avoir une vue exacte de la façon dont $\mathbb{R}$ a été introduit.

Fonctions différentiables : Le candidat peut se borner aux applications d'une partie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Si l'étude est faite dans la situation générale des espaces vectoriels normés, on aimerait que les exemples ne concernent pas uniquement le cas de la dimension finie.

Extremum : L'exposé est presque toujours limité à l'étude locale d'une fonction définie sur un ouvert avec les hypothèses de différentiabilité habituelles. Le sujet est plus général ; le problème de l'existence d'un extremum global devrait être abordé (fonction numérique continue sur un compact, distance d'un point à un fermé convexe dans un espace de Hilbert...). Les exemples et applications sont bien pauvres. Ici encore, si la théorie est faite dans la situation générale d'un espace de Banach, on aimerait qu'elle ne soit pas appliquée seulement dans le cas de $\mathbb{R}^n$, et que les candidats soient capables d'évoquer quelques problèmes classiques de calcul des variations.

Comparaison des fonctions au voisinage d'un point. Un candidat a été gêné par les notations de Landau $o(1)$ et $O(1)$, qu'il a employées de façon maladroite et incorrecte.

Fonctions inverses : La notion essentielle de difféomorphisme local n'est pas toujours claire dans l'esprit des candidats. Comme propriétés de régularité, on étudie seulement si la fonction inverse de f est de classe C^1 ; il serait intéressant d'examiner les conséquences de l'hypothèse : f de classe C^k, de classe C^∞, ou analytique.

Fonctions circulaires directes et inverses : Un exposé concret est certes nécessaire, mais il n'est pas superflu de le motiver (recherche des homomorphismes continus du groupe additif $\mathbb{R}$ dans le groupe multiplicatif des nombres complexes de module 1). Une définition de π comme double du premier zéro positif du cosinus ne dispense pas de faire le lien avec la définition de la géométrie élémentaire.

Opérations sur les séries numériques. On ne parle en général pas de convergence commutative ni de propriétés d'associativité. La comparaison avec une intégrale, la théorie des familles sommables ou séries multiples sont rarement utilisées. Les méthodes de sommation des séries divergentes (par exemple la méthode des moyennes arithmétiques) ne sont pas connues.

Liens entre la théorie des séries et la théorie de l'intégrale : L'analogie complète dans le cas de la convergence absolue est mal mise en valeur. Les candidats ne pensent pas au parti qu'on peut tirer dans la théorie des séries de l'intégration par parties (règle d'Abel) et du changement de variables.

Méthodes de développement en série entière. : Un candidat, qui a choisi pour l'exposé final le développement de $(1+x)^m$ par la méthode de l'équation différentielle, se borne au calcul des coefficients et du rayon de convergence ; il ne montre pas qu'il obtient dans l'intervalle de convergence une solution de l'équation différentielle et que cette solution est bien $(1+x)^m$.

Equations différentielles du premier ordre : On néglige les équations du type $U'_x(x,y)dx + U'_y(x,y)dy = 0$, ainsi que les équations non résolues en y'.

Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants : Les candidats se limitent au cas complexe et ont peu d'idées sur les problèmes propres au cas réel. Pour établir l'existence et l'unicité des solutions du système avec second membre, il n'est évidemment pas nécessaire de faire appel aux théorèmes généraux sur les équations différentielles.

Géométrie différentielle : Les sujets correspondants, rarement choisis, ont été traités de façon peu satisfaisante ; les candidats semblent s'intéresser de moins en moins à la géométrie.

Cinématique : Les exposés de cinématique sont en général médiocres, les candidats ayant des connaissances trop superficielles. C'est sans doute pour cette raison qu'ils consacrent beaucoup de temps à des préliminaires, qu'ils pourraient supposer connus ou n'évoquer qu'en quelques mots (cadre spatio-temporel), et se contentent ensuite d'effleurer le sujet réel qui leur est proposé.

Répartition des notes

Sur les 266 admissibles, 263 candidats ont participé à l'épreuve orale d'Analyse, les trois autres ayant abandonné.

	0 à 9	10 à 19	20 à 29	30 à 39	40 à 49	50 à 59	60 à 69	70 à 80
Admissibles	32	24	66	46	36	31	20	8
Reçus	0	6	30	23	30	30	19	8

Rapport du Jury de l'Agrégation - Femmes

Remarques générales

Le jury insiste sur les conseils et critiques suivants :

- Les sujets posés couvrant en général une large tranche du programme, il serait souhaitable que les candidates précisent dans une courte introduction le cadre dans lequel elles se placent et les points jugés par elles importants qu'elles se proposent de traiter. Il est particulièrement déplorable que des candidates ayant découvert la question proposée dans un manuel l'exposant de façon très détaillée, se soient bornées à recopier textuellement les premières pages de l'étude en laissant de côté des points fondamentaux.

- Les applications et les exemples sont presque toujours très pauvres, sinon complètement oubliés. Les documents mis à la disposition des candidates devraient pourtant leur apporter sur ce point une aide précieuse.

- Pour leur exposé, trop de candidates ne laissent aucun choix au jury ou proposent des choses vraiment trop triviales.

- Les «impasses» faites au cours de la préparation comportent de gros risques, étant donnée l'ampleur des sujets posés.

- Trop peu de candidates font un effort pour éviter de lire leurs notes ou de les recopier presque intégralement sur le tableau, ralentissant ainsi de façon sensible le rythme de l'exposé.

Remarques particulières

Suites et séries numériques : Ce sujet nécessite un effort de synthèse en général assez mal compris. Une candidate a expliqué que «suite» signifiait «application», que «numérique» signifiait «à valeurs dans $\mathbb{R}$» et a transformé les séries numériques en familles sommables. Trois candidates ne savaient pas ce qu'est une suite extraite d'une suite donnée.

Suites et séries de fonctions : La convergence uniforme est en général traitée de façon convenable. Quant à la convergence simple, aucune de ses propriétés n'est jamais citée. Pourtant par exemple toute limite simple de fonctions convexes est convexe. et l'étude des fonctions convexes fait partie du programme. La convergence uniforme sur tout compact de l'ouvert de définition pour une suite de fonctions holomorphes est peu connue.

Séries entières : Un certain nombre de candidates croient qu'une série entière converge uniformément dans le disque de convergence tout entier. D'autres savent que la convergence est uniforme dans un disque fermé strictement intérieur au disque de convergence et de même centre que lui, mais ignorent qu'il en est de même dans un disque fermé quelconque strictement intérieur au disque de convergence.

Prolongement au domaine complexe des fonctions usuelles : On parle du prolongement de l'exponentielle, du sin et du cos, mais jamais du prolongement des polynômes ou des fractions rationnelles. L'A.B.C. du prolongement analytique est ignoré.

Fonctions transcendantes élémentaires : Aucune candidate n'a pu définir ce qu'est une fonction transcendante.

Fonctions convexes : Deux candidates ont été incapables de citer une seule application de la théorie des fonctions convexes.

Théorèmes des accroissements finis - Formules de Taylor : De nombreuses candidates ignorent l'existence du théorème des accroissements et de formules de Taylor pour les applications de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$. Ces théorèmes figurent pourtant explicitement au programme du concours. Les applications des formules de Taylor sont toujours très pauvres même quand elles sont souhaitées explicitement dans le titre de l'exposé.

Dérivées. Fonctions implicites. Fonctions réciproques : Ces notions peuvent être étudiées dans les espaces de Banach. Trop souvent malheureusement les candidats ne savent pas faire la liaison avec les cas élémentaires.

Intégration : De très bonnes leçons, d'autres beaucoup plus faibles. Comment se fait-il que de nombreuses candidates ne savent pas démontrer que les primitives de 0 sur un connexe sont les constantes ?

Mouvement d'un repère orthonormé, mouvement d'un solide, composition des mouvements, propriétés des courbes: Les rares candidates qui ont choisi ces sujets ont oublié qu'elles faisaient des mathématiques.

Répartition des notes

	0 à 8	9 à 16	17 à 24	25 à 32	33 à 40	41 à 48	49 à 56	57 à 64	65 à 72	73 à 80
Admissibles	30	16	16	28	18	32	26	15	5	2
Admises	1	3	6	10	10	27	24	15	5	2

ARITHMETIQUE - ALGEBRE - GEOMETRIE

Rapport du Jury de l'Agregation - Femmes

Il a été largement tenu compte dans les «réflexions générales» précédemment exposées des remarques de ce jury. Ici ne sera présentée qu'une analyse de l'ensemble des leçons.

Algèbre générale

–Les ***groupes*** conduisent à des exposés trop pauvres en exemples. L'étude du ***groupe symétrique*** σ_n a permis de constater que cette année encore la formule $\epsilon(\sigma\tau) = \epsilon(\sigma)\,\epsilon(\tau)$ est admise sans démonstration valable.

–Les ***idéaux*** donnent lieu à des exposés formels, sans exemples, non liés à l'arithmétique, débouchant immanquablement sur une vague étude des anneaux principaux (généraux, bien entendu !) ; la proposition «Si A est commutatif unitaire, l'idéal $\mathfrak{M}$ est maximal si et seulement si $A/_{\mathfrak{M}}$ est un corps», qui est presque toujours le sommet d'un tel exposé, est démontrée à grand'peine, sans prendre d'images réciproques d'idéaux.

Les ***polynômes à plusieurs indéterminées*** sont encore pour les candidates un objet mystérieux dont la définition même leur pose des problèmes ardus.

Algèbre linéaire

A la grande surprise du jury, cette partie de l'algèbre donne encore lieu à de très mauvais exposés et à des erreurs énormes.

Le jury ***n'a pas entendu une seule fois*** une démonstration correcte du théorème de la dimension finie ; certaines candidates croient s'en tirer en évoquant un théorème de Zorn mal assimilé, d'autres se laissent abuser par des notations trompeuses (numérotation de vecteurs) qui les conduisent à des cercles vicieux. Presque toutes ont calé sur la question «Montrer que tout sous-espace d'un espace de dimension finie n est lui-même d'une dimension finie inférieure ou égale à n».

Le sujet «Système d'équations linéaires» a fait achopper toutes les candidates qui l'ont choisi, sauf une, sur la question des déterminants caractéristiques. De façon précise, le jury n'a pu obtenir la démonstration des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un vecteur $b \in K^n$ appartienne au sous-espace V, engendré par un système $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ de p vecteurs de rang r, les candidates n'ayant pas compris la réciproque (la nullité de tous les caractéristiques implique $b \in V$) ou même n'y ayant pas réfléchi.

La somme directe de p sous-espaces $E_1, E_2, \ldots, E_p$ de E donne l'occasion dans presque toutes les leçons de citer le théorème suivant «La somme $E_1 + E_2 + \ldots, E_p$ est directe si, et seulement si, pour tout couple (i, j), avec $i \neq j$, on a $E_i \cap E_j = \{0\}$» (!).

Enfin le sujet «Valeurs propres, vecteurs propres», pourtant simple et sans mystère, a rarement obtenu plus de la moyenne.

Géométrie

La plupart des candidates ont rejeté le sujet de géométrie, ce qui indique bien le peu de considération dont jouit à l'heure actuelle cette discipline. Chez celles, qui malgré tout le choisissent, on voit s'étaler une grande faiblesse : telle candidate, après une leçon remplie de théorèmes généraux assez difficiles sur les formes quadratiques, se montre incapable en dix minutes de dessiner les sous-espaces isotropes de la forme quadratique $x^2 + y^2 - z^2$, telle autre ne sait pas qu'une quadrique contient des droites, telle autre enfin est incapable de définir une tangente ou un plan tangent à une conique. Les propriétés projectives sont confondues avec les propriétés affines et il est aléatoire de chercher à obtenir une classification des quadratiques suivant leur rang.

Le sujet «Barycentre, formes affines et convexité» montre que les propriétés élémentaire des ensembles convexes sont ignorées. Pourtant, les études d'Analyse du programme de maîtrise devraient habituer les candidates à une certaine intuition de ces ensembles ; aucune n'a pu dire qu'une convexe fermée est une intersection de demi-espaces !

Répartition des notes.

	0 à 8	9 à 16	17 à 24	25 à 32	33 à 40	41 à 48	49 à 56	57 à 64	65 à 72	73 à 80
Admissibles	20	25	33	27	18	11	21	21	9	3
Admises	1	5	14	10	14	8	19	20	9	3

Rapport du Jury de l'Agrégation - Hommes

L'algèbre n'est pas un assemblage de trivialités exprimées de façon abstraite ni l'exposé de formalismes arbitraires. Elle est motivée par les applications et doit se nourrir d'exemples concrets. Chaque définition doit être suivie d'exemples, chaque théorie d'applications.

Trop de candidats présentent des plans encombrés de «rappels» ou de «théorèmes» triviaux qui escamotent la question.

Sur différents sujets, le jury a particulièrement regretté certaines lacunes. Il les cite dans la liste ci-dessous, dans laquelle les futurs candidats trouveront des idées dont ils pourront éventuellement s'inspirer pour enrichir leurs exposés et leur culture.

Groupes symétriques : générateurs, simplicité des groupes alternés.

Analyse combinatoire : absence d'applications, en particulier au calcul des Probabilités.

Ensembles ordonnés : absence d'exemples de raisonnements utilisant des éléments maximaux dans d'autres branches des mathématiques ; relation d'ordre et divisibilité.

Groupes : Exemples de groupes d'origine géométrique, espaces homogènes.

Congruences sur $\mathbb{Z}$ ***:*** Théorèmes de Fermat, de Wilson ; réduction modulo p des équations diophantiennes ; décomposition de $Z/_{mZ}$ en produit de $Z/_{m_k Z}$; indicatrice d'Euler.

Anneaux commutatifs : Ne sont cités comme exemples que Z et $k\,[X]$.

Polynômes : Quotient de $k[X]$ par un idéal et extension algébrique de k (en particulier $\left(\mathbb{C} = \mathbb{R}\,[X]_{x^2+1}\right)$; anneau des séries formelles $k\,[\,[X]\,]$ et division dans $k[X]$ suivant les puissances croissantes ; fonctions polynômes (fonction polynôme sur une k-algèbre, polynôme minimal d'un endomorphisme, substitution de polynômes); expression d'un polynôme symétrique par la ***substitution*** des polynômes symétriques élémentaires ; factorialité de $k[X_1, X_2, \dots X_n]$.

Algèbre sur un anneau commutatif : Idéaux, homomorphismes ; exemples (algèbres de matrices, algèbres de groupes, algèbres de fonctions).

Algèbre linéaire : Ses relations avec la géométrie et la théorie des opérateurs linéaires, dualité et corrélation ; contravariance et covariance (en particulier matrices de changement de bases dans un espace vectoriel et son dual) notions sur les sous-groupes du groupe linéaire ; sous-espaces stables d'un endomorphisme, endomorphisme semi-simple (tout sous-espace stable possède un supplémentaire stable), sous-espaces stables et formes réduites.

Algèbre multilinéaire : Rang d'une forme bilinéaire, réduction des formes bilinéaires alternées ; l'espace vectoriel $\Lambda^n(E^*)$ des n-formes multilinéaires alternées sur E de dimension n, prolongement d'un endomorphisme u de E de dimension n, à $\Lambda^n(E^*)$, déterminant de u ; discriminant d'une forme quadratique, déterminant de Gram.

Espaces vectoriels hermitiens et euclidiens : Diagonalisation simultanée d'une famille d'endomorphismes auto-adjoints deux à deux permutables, généralisation aux opérateurs normaux, application à la diagonalisation des endomorphismes unitaires ; extensions au complexifié de O(n), forme réduite sur $\mathbb{R}$ d'une matrice orthogonale ; paramétrisation de So(3) à l'aide de la sphère à trois dimensions, homomorphisme de So(3) avec l'espace projectif de dimension trois.

Géométrie affine : Représentation matérielle du groupe affine ; forme réduite d'une isométrie d'un espace affine euclidien ; point invariant d'une similitude d'un espace affine euclidien.

Géométrie projective, coniques : Espace projectif, groupe projectif, repère projectif ; groupe projectif de la droite projective complexe,; homographie ; involution ; corrélation et dualité. Espace affine et espace projectif. Propriétés projectives des coniques, leurs relations avec les propriétés affines et métriques.

Répartition des notes

	0 à 8	9 à 16	17 à 24	25 à 32	33 à 40	41 à 48	49 à 56	57 à 64	65 à 72	73 à 80
Admissibles	32	36	14	41	35	27	34	25	17	5
Admis	2	5	1	17	20	25	32	24	16	5

LISTES COMPLEMENTAIRES DE SUJETS PROPOSES A L'ORAL

Algèbre (Agrégation - Hommes)

1 - *Relation d'ordre. Exemples et applications.*

2 - *Structures algébriques quotients.*

3 - *Homomorphisme de structures algébriques.*

4 - *Groupes opérant sur un ensemble.*

5 - *Idéaux d'un anneau. Exemples et applications.*

6 - *Algèbre sur un anneau commutatif. Exemples.*

7 - *Congruences.*

8 - *Divisibilité.*

9 - *Numération. Nombres décimaux.*

10 - *Polynômes en plusieurs indéterminées. Dérivation. Applications.*

11 - *Fonctions polynômes associées à un polynôme en une ou plusieurs indéterminées sur un corps commutatif. Applications.*

12 - *Polynômes symétriques. Applications.*

13 - *Résultant de deux polynômes. Problèmes d'élimination. Applications.*

14 - *Fractions rationnelles en une indéterminée sur un corps commutatif.*

15 - *Espaces vectoriels. Parties génératrices d'un espace vectoriel. Dimension.*

16 - *Applications linéaires. Espaces vectoriels quotients.*

17 - *Applications multilinéaires.*

18 - *Complexifié d'un espace vectoriel réel. Complexifié d'une application linéaire. Applications.*

19 - *Sous-espaces propres, sous-espaces stables d'un endomorphisme. Applications.*

20 - *Polynôme minimal d'un endomorphisme. Applications.*

21 - *Formes bilinéaires et formes quadratiques.*

22 - *Groupe orthogonal. Matrices orthogonales.*

23 - *Groupe unitaire. Matrices unitaires.*

24 - *Adjoint d'un endomorphisme d'un espace vectoriel hermitien. Applications.*

25 - *Groupes de rotations.*

26 - *Espace affine. Applications affines. Groupe affine.*

27 - *Convexité dans les espaces affines réels. Applications.*

28 - *Liaison entre géométrie affine et géométrie projective.*

29 - *Groupe projectif de la droite projective complexe. Applications géométriques.*

30 - *Isométries de l'espace affine euclidien de dimension n.*

31 - *Distance et angle de deux variétés affines en géométrie euclidienne.*

32 - *Transformations planes conservant l'ensemble des droites et cercles.*

33 - *Forme réduite d'une isométrie de l'espace affine euclidien de dimension 3.*

34 - *Transformation par polaires réciproques dans le plan. Applications.*

35 - *Faisceaux linéaires ponctuels et tangentiels de coniques. Applications.*

36 - *Propriétés affines des coniques.*

37 - *Courbes unicursales planes.*

38 - *Points cycliques, foyers.*

Algèbre (Agrégation - Femmes)

1 - *Applications d'un ensemble fini dans lui-même.*

2 - *Groupe opérant sur un ensemble ; applications.*

3 - *Polynômes symétriques à p indéterminées.*

4 - *Base et dimension dans les espaces vectoriels ; applications.*

5 - *Groupe orthogonal réel en dimension finie.*

6 - *Groupe unitaire en dimension finie.*

7 - *Espace affine de dimension finie. Groupe affine.*

8 - *Isométries dans l'espace affine euclidien de dimension n.*

9 - *Similitudes dans* $\mathbb{R}^3$.

10 - *Torseurs dans* $\mathbb{R}^3$. *Equiprojectivité.*

11 - *Dualité en géométrie projective.*

12 - *Faisceaux linéaires ponctuels de coniques.*

13 - *Propriétés métriques des coniques ; liaison avec la géométrie projective.*

14 - *Quadriques. Propriétés projectives.*

15 - *Pôles et polaires en géométrie plane.*

16 - *Pôles et polaires en géométrie dans l'espace.*

17 - *Application des réductions de formes quadratiques à la classification des quadriques.*

18 - *Similitudes directes et inverses dans le plan affine euclidien.*

19 - *Homographies.*

20 - *Structure de corps. Corps finis.*

21 - Matrices et applications linéaires.

22 - Divisibilité dans les anneaux de polynômes.

23 - Rang d'une application linéaire. Groupe linéaire.

24 - Système de générateurs d'un groupe. Exemples.

25 - Formes bilinéaires sur un espace vectoriel.

26 - Barycentres, formes affines et convexité (dans un espace affine réel).

27 - Inversion dans l'espace ; sphères et cercles.

28 - Divisions des polynômes et applications.

29 - Structure d'anneau. Exemples.

30 - Isométries de $\mathbb{R}^2$ *laissant globalement invariante une figure donnée.*

31 - Sous-espaces d'un espace vectoriel.

32 - Déterminants.

Analyse (Agrégation - Femmes)

1 - Espaces complets ; exemples.

2 - Espaces connexes ; parties connexes $\mathbb{R}$.

3 - Normes.

4 - Espaces vectoriels normés.

5 - Approximation d'un nombre réel.

6 - Suites.

7 - Convergence.

8 - Monotonie.

9 - Image d'une fonction continue.

10 - Théorème du point fixe ; applications.

11 - Fonctions d'une ou plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}^p$.

12 - Dérivées d'une fonction numérique d'une variable réelle.

13 - Théorème des accroissements finis.

14 - Formules de Taylor et applications.

15 - Développements limités (ou asymptotiques) - Applications.

16 - Dérivées partielles.

17 - Formules de Taylor (cas des fonctions vectorielles de plusieurs variables).

18 - Différentielle.

19 - Opérations sur les fonctions différentiables.

20 - Fonctions implicites ; applications géométriques.

21 - Problèmes d'extremum.

22 - Fonctions circulaires.

23 - Extension au domaine complexe des fonctions usuelles.

24 - Exponentielle complexe.

25 - Suites et séries numériques.

26 - Suites et séries de fonctions.

27 - Intégrales curvilignes.

28 - Equations différentielles linéaires.

29 - Equations différentielles du 1er ordre.

30 - Propriétés affines des courbes planes.

31 - *Propriétés affines des courbes gauches.*

32 - *Propriétés métriques des courbes planes.*

33 - *Courbure et torsion.*

34 - *Plan tangent.*

35 - *Mouvement plan sur plan.*

36 - *Cinématique du solide.*

Analyse (Agrégation - Hommes)

1 - *Limites.*

2 - *Espaces compacts. Exemples. Applications.*

3 - *Espaces métriques. Espaces métriques compacts. Exemples. Applications.*

4 - *Espaces métriques. Espaces métriques complets. Exemples. Applications.*

5- *Espaces connexes. Parties connexes de* R.

6 - *Topologie de l'espace numérique* R^n.

7.- *Topologie de* C. *Applications (par exemple, le théorème de d'Alembert-Gauss).*

8 - *Espaces vectoriels normés.*

9 - *Fonctions vectorielles d'une ou plusieurs variables réelles.*

10 - *Extremum.*

11 - *Fonctions de classe* C^k.

12 - *Applications de classe* C^1 *d'un ouvert de* R^n *dans* R^p.

13 - *Les problèmes d'interversion de limites en analyse. Application aux séries et aux intégrales.*

14 - *Comparaison de fonctions au voisinage d'un point. Applications.*

15 - *Fonctions inverses (ou réciproques).*

16 - *Fonctions implicites. Applications géométriques.*

17 - *Théorie de l'intégrale.*

18 - *Primitives et intégrales.*

19 - *Liaison entre la théorie de l'intégrale et la théorie des séries numériques.*

20 - *Intégrale curviligne.*

21 - *Exemples d'équations différentielles dont l'intégration se ramène à des quadratures (c'est-à-dire à des calculs de primitives).*

22 - *Equation de Lagrange, équation de Clairaut et enveloppes de droites.*

23 - *Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants.*

24 - *Enveloppe d'une famille de droites dans le plan.*

25 - *Etude locale des courbes : propriétés affines.*

26 - *Etude locale des courbes : propriétés métriques.*

27 - *Enveloppe des normales à une courbe plane. Exemples.*

28 - *Tracé des courbes planes définies en coordonnées polaires par* $\rho = f(\theta)$. *Exemples.*

29 - *Mouvement relatif, changement de repère, applications.*

30 - *Mouvement d'un repère orthonormé. Applications à la théorie métrique des courbes gauches et à la cinématique du solide.*

31 - *Mouvement d'un plan sur un plan.*