COMPOSITION
DE PROBABILITÉS ET STATISTIQUES

I

$\mathbf{R}^2$ est muni de la distance euclidienne et considéré comme espace affine et métrique. Un point de $\mathbf{R}^2$ est défini par ses coordonnées (x, y).

Soit Ω l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^2$, Π l'ensemble $[0,\pi[\times\mathbf{R}$. L'application qui, à tout couple (u, v), élément de Π, associe l'élément $\omega(u, v)$ de Ω d'équation $x \cos u + y \sin u = v$, est une bijection de Π sur Ω. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des images dans Ω des boréliens de Π et soit μ la mesure image de la mesure de Borel-Lebesgue de Π par cette bijection.

Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des parties convexes compactes de $\mathbf{R}^2$. Étant donné $A \in \mathcal{C}$, on pourra admettre que l'ensemble Ω_A des droites qui coupent A est mesurable dans $(\Omega, \mathcal{S})$.

On admettra que toute partie A de $\mathcal{C}$ possède la propriété suivante : à toute valeur de u correspondent deux valeurs de v :
$v_1(u)$ et $v_2(u)$, $v_1(u) \leqslant v_2(u)$ telles que toute droite $\omega(u, v)$ coupe A si et seulement si $v \in [v_1(u), v_2(u)]$.

1° Soit $\mathcal{C}^*$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{C}$, dont la frontière est une courbe fermée simple rectifiable; pour $A \in \mathcal{C}^*$, calculer l'intégrale

$$\int_{[0,\pi[} [v_2(u) - v_1(u)]\, du$$

en fonction de la longueur L_A de la frontière de A ; en déduire que la mesure dans $(\Omega, \mathcal{S}, \mu)$ de l'ensemble des droites qui coupent A est L_A.

(On pourra d'abord montrer que l'intégrale est indépendante de l'origine O et par suite la calculer en supposant que $O \in A$, ce qui conduira à une intégrale telle que : $\int_{[0,2\pi[} w(u)\, du$ avec $w(u) \geqslant 0$. On pourra dorénavant supposer que la frontière de A est une courbe « fermée simple rectifiable »).

N.B. — *Le candidat qui ne saura pas résoudre cette question préliminaire en admettra le résultat pour traiter la suite du problème.*

A étant un élément déterminé de $\mathcal{C}^*$, dont la frontière a pour longueur L_A, si Ω_A est l'ensemble des droites qui coupent A, $\mathcal{S}_A$ la trace de $\mathcal{S}$ sur Ω_A et P_A la restriction à $(\Omega_A, \mathcal{S}_A)$ de la mesure $\frac{1}{L_A}\mu$, $(\Omega_A, \mathcal{S}_A, P_A)$ est un espace probabilisé. *Cet espace sera l'espace de référence qui sera utilisé dans les deux premières parties du problème.*

Si B est une partie de $\mathbf{R}^2$ telle que l'ensemble des droites de $\mathbf{R}^2$ appartenant à Ω_A qui coupent B est un événement dans $(\Omega_A, \mathcal{S}_A)$, on notera cet événement E_B.

2° *a.* Montrer que, si $B \in \mathcal{C}^*$ et $B \subset A$, on a : $P_A(E_B) = \frac{L_B}{L_A}$, où L_B est la longueur de la frontière de B.

b. Soit B et B′ deux éléments de $\mathcal{C}^*$ inclus dans A tels que $B \cap B' \neq \varnothing$, C le plus petit ensemble convexe de $\mathbf{R}^2$ qui contient B et B′ (enveloppe convexe de B et B′) et L_B, $L_{B'}$, L_C les longueurs respectives des frontières de B, B′ et C. Montrer que :

$$P_A(E_B \cap E_{B'}) = \frac{L_B + L_{B'} - L_C}{L_A}$$

c. Soit $B \in \mathscr{C}^*$ tel que $B \cap A \neq \varnothing$, C l'enveloppe convexe de B et A, L_B et L_C les longueurs respectives des frontières de B et C. Montrer que :

$$P_A(E_B) = \frac{L_A + L_B - L_C}{L_A}$$

d. Soit deux disques fermés B et B′ inclus dans A, de rayons respectifs r et r' $(r > 0,\ r' > 0)$ et dont la distance des centres est d. Calculer la probabilité pour qu'une droite coupe ces deux disques *à la fois.* On distinguera les deux cas : $d \leqslant r + r'$ et $d > r + r'$. Dans ce second cas, on pourra introduire les tangentes communes intérieures aux cercles frontières des disques.

3° *a.* Étant donnés dans A deux points m et n dont la distance est l, trouver la probabilité pour qu'une droite coupe le segment $[m, n]$ en fonction de l. Comparer le résultat ainsi obtenu à celui de I 1°.

b. Soit G un arc de courbe inclus dans A d'extrémités a et b tel que $G \cup [a, b]$ soit la frontière d'un élément de $\mathscr{C}^*$; on désigne par L la longueur de G et par l la distance entre a et b.

Quelle est la probabilité pour qu'une droite coupe G en deux points distincts ou soit « tangente » à G en laissant G toute entière d'un même côté? pour qu'elle coupe G en un point et un seul?

c. Soit B un disque fermé inclus dans A, de rayon r $(r > 0)$ et de centre b, m et n deux points de A situés sur un même diamètre de B et i le milieu de $[m, n]$. On appelle δ la distance entre b et i et 2ρ la longueur de $[m, n]$ $(\rho > 0)$.

Calculer en fonction de r, δ et ρ la probabilité pour qu'une droite coupe *à la fois* B et le segment $[m, n]$.

Cas particulier : $\delta = 0$, $0 < \rho < r$: expliquer pourquoi ce résultat donne la solution du problème suivant (problème de l'aiguille de Buffon) : on lance *au hasard* une « aiguille » de longueur 2ρ sur le « plan » sur lequel sont tracées les droites parallèles $x = 2nr$, $n \in \mathbf{Z}$; quelle est la probabilité pour que « l'aiguille » coupe une quelconque de ces parallèles? Quelle est l'hypothèse mathématique correspondant à l'expression « *au hasard* »?

II

Dans cette seconde partie, l'espace probabilisé est toujours $(\Omega_A, \mathscr{S}_A, P_A)$, mais on particularise en prenant pour A le disque :

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

1° B est un disque fermé de rayon r $(r > 0)$ et tel que la distance de son centre à l'origine O soit $2d$ $(d \geqslant 0)$.

Calculer $P_A(E_B)$ dans les différents cas possibles.

2° Si $m = (\alpha, 0)$ et $n = (\beta, 0)$ sont deux éléments de $\mathbf{R}^2$, calculer en fonction de α et β la probabilité pour qu'une droite coupe le segment $[m, n]$.

3° On note $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie sur Ω de la manière suivante : deux éléments ω et ω' de Ω sont équivalents si et seulement si ou bien ω et ω' coupent la droite $y = 0$ en un même point ou bien ω et ω' sont parallèles (au sens large) à la droite $y = 0$.

Soit $\mathscr{T}$ la sous-tribu des parties S de $\mathscr{S}$ telles que, si ω est un élément de S, tout élément ω' de Ω, $\mathscr{R}$-équivalent à ω, appartient aussi à S; soit $\mathscr{T}_A$ la trace de $\mathscr{T}$ sur Ω_A.

B_r étant le disque $\{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2,\ r \in \mathbf{R}^+ - \{0\}\}$, calculer un représentant de la probabilité conditionnelle $P(E_{B_r} \mid \mathcal{C}_A)$.

Trouver le lien entre cette probabilité conditionnelle et la probabilité pour qu'une droite ω coupe B_r sachant qu'elle passe par un point $m = (\alpha, 0)$ donné.

4° On suppose que le rayon r du disque $B_r = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leqslant r^2\}$ satisfait à $0 < r \leqslant 1$. La longueur de la corde découpée sur une droite ω par B_r est une variable aléatoire Z_r dont on demande de déterminer la fonction de répartition. Cette loi est-elle absolument continue par rapport à la mesure de Borel-Lebesgue? Calculer l'espérance et la variance de Z_r.

En prenant $r = 1 - \frac{1}{n}$, on fait correspondre à tout entier $n > 1$ une variable aléatoire $Z'_n = Z_{1-\frac{1}{n}}$. La suite $\{Z'_n\}$ converge-t-elle en probabilité lorsque n tend vers l'infini?

III

On suppose désormais que la distribution de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{S})$, donc sur Π, résulte de la construction suivante :

t étant un nombre réel appartenant à l'intervalle $]-1, +1]$, la droite $x = t$ rencontre le demi-cercle :

$$\Gamma = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1,\ y > 0\} \cup \{(1,0)\}$$

en un point h; $\cos u$, $\sin u$, où $u \in [0, \pi[$, sont les coordonnées de h; v étant un nombre réel quelconque, la perpendiculaire à Oh en k telle que $\overrightarrow{Ok} = v\overrightarrow{Oh}$ est une réalisation d'un élément de Ω.

La distribution de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{S})$ est alors parfaitement déterminée par la distribution du couple (T, V), t et v étant des réalisations de T et de V; u est une réalisation de U.

1° Quelle relation lie les variables U et T?

2° Quelle serait la loi du couple (T, V) qui induirait sur $(\Omega, \mathcal{S})$ la probabilité dont la restriction à $(\Omega_A, \mathcal{S}_A)$ est P_A, lorsque A est le disque unité de la seconde partie?

3° Dans cette question, on suppose les variables T et V indépendantes, T uniformément distribuée sur $]-1, +1]$, V symétrique sur $\mathbf{R}$ et de fonction de répartition F. On pose

$$\Phi(x) = \int_0^x F(v)\, dv.$$

a. Montrer que U admet une densité et trouver cette densité γ.

b. Quelle est la probabilité $H(a)$ pour qu'une droite ω coupe la demi-droite $]-\infty, a] \times \{0\}$?

c. Montrer que l'application H de $\mathbf{R}$ dans $[0,1]$, qui à a associe $H(a)$, est la fonction de répartition d'une distribution de probabilité. Cette distribution a-t-elle une densité?

d. Calculer H dans le cas où V admet une densité f telle que

$$f(v) = \frac{1}{2} e^{-|v|}.$$

Rapport sur la composition de Probabilités et Statistiques

Comme les années précédentes, le problème ne se rattache à aucune question particulière de Probabilités, mais fait appel à un très large éventail de notions figurant au programme de l'Agrégation. D'une longueur raisonnable, il est assez simple, une bonne partie pouvant être traitée en sachant seulement quelques résultats élémentaires qui concernent la théorie de la mesure et la définition d'un espace probabilisé ; toutefois certains candidats ont pu être déroutés par le type un peu particulier des espaces de Probabilités envisagés, qui l'aurait fait qualifier, il y a quelques années, de problème de Probabilités géométriques.

Il faut déplorer cependant :

- la méconnaissance fréquente de quelques propriétés géométriques élémentaires indispensables pour la résolution du problème : il est inadmissible dans un tel concours d'écrire des formules comme $ds = \rho(\theta)\, d\theta$ en coordonnées polaires, d'être apparemment dépassé par le calcul de la longueur d'une corde d'un cercle en fonction de sa distance au centre, d'ignorer ce qu'est une enveloppe convexe, voire un ensemble convexe, et de concevoir l'enveloppe convexe de deux cercles comme leur union ou comme un autre cercle tangent aux deux cercles donnés, d'être enfin aussi maladroit ou étonnant dans des calculs de longueurs de courbes formées d'arcs de cercles et de portions de tangentes...

- l'incapacité de trop de candidats à conduire correctement un raisonnement ou à appliquer une théorie : le fait que presque tous les candidats n'aient pas su trouver un représentant d'une probabilité conditionnelle demandé en II 3°) semble à cet égard très significatif.

Dans I-1°, il fallait établir un résultat utilisé par la suite ; mieux valait l'admettre, comme l'énoncé y invitait formellement, que d'écrire d'énormes bêtises ! De trop nombreux candidats ne sont même pas capables de montrer comment le fait de prendre $0 < A$ permet de transformer :

$$\int_{[0,\pi]} [v_2(u) - v_1(u)]\, du \quad \text{en} \quad \int_{[0,2\pi]} w(u)du$$

en posant :

$$w(u) = v_2(u) \text{ pour } 0 \leqslant u < \pi \qquad w(u) = -v_1(u-\pi) \text{ pour } \pi \leqslant u < 2\pi$$

Serait-elle aussi du passé la remarque que la considération des équations des droites d'appui sous la forme $x \cos u + y \sin u = w(u)$ revient à se donner la frontière du convexe par son équation d'Euler et que par conséquent sur un arc enveloppe on a : $ds = [\, w(u) + w''(u)\,]\, du$ lorsque w'' existe ?

Mais il est possible également d'arriver au résultat en remarquant que, θ et ρ étant des coordonnées polaires de M sur la frontière C, on a, si la tangente en M existe,

$$\int_{[0,2\pi]} w(u)du = \int_C \rho \sin V\,(d\theta + dv) \quad \text{et} \quad \operatorname{tg} v = \frac{\rho\, d\theta}{d\rho}$$

en posant $V = \frac{\pi}{2} + u - \theta$

Dans I,2° les notations les notations sont soigneusement précisées pour éviter toutes confusions, trop souvent cette précaution n'a servi à rien.

Ainsi, écrire dans I-2 c) :

$$P_A(E_B) = P_A(E_A \cap E_B) = P_A(E_A) + P_A(E_B) - P_A(E_A \cup E_B))$$

ne prouve absolument rien, puisque ;

$$E_A \cup E_B = E_A$$

alors qu'il faut se servir de :

$$P_A(E_B) = P_A(\Omega_A \cap \Omega_B) = P_A(\Omega_A) + P_A(\Omega_B) - P_A(\Omega_A \cup \Omega_B)$$

Quant à la confusion entre B, Ω_B et E_B, elle est trop grossière et pourtant elle a été faite plus d'une fois.

On s'imagine aussi que : $\Omega_A \cap \Omega_B = \Omega_{A \cap B}$!

On voit aussi affirmer par plusieurs candidats, dans I 2-b) que si $B \cap B' \neq \phi$, $B \cup B'$ est l'enveloppe convexe de B et B' et que par conséquent : $P_A(\Omega_B \cup \Omega_{B'}) = P_A(\Omega_{B \cup B'}) = \frac{L_C}{L_A}$!

Heureusement, quelques copies seulement contiennent de telles énormités.

Mais beaucoup ont essayé de montrer que $\Omega_B \cup \Omega_{B'} = \Omega_c$ si $B \cap B' \neq \phi$ sans y parvenir de façon rigoureuse et souvent en employant des méthodes compliquées. Il suffisait de revenir aux définitions. Manifestement $\Omega_B \cup \Omega_{B'} \subset \Omega_c$. Il suffit donc de montrer que si $B \cap B' \neq \phi$ et si une droite coupe C elle coupe B ou B', ou ce qui revient au même, si une droite coupe C sans couper ni B ni B', c'est que $B \cap B' = \phi$.

Soit D une droite qui coupe C mais qui ne coupe ni B ni B' ; il existe donc :

$$b \in B,\ b' \in B',\ \lambda \in \mathbb{R}^+,\ \lambda' \in \mathbb{R}^+ \text{ avec } \lambda + \lambda' = 1 \text{ tel que le point } \lambda b + \lambda' b' \text{ appartient à } D \cap C.$$

Si $f(m) = 0$ est l'équation de D, on a $f(\lambda b + \lambda' b') = 0$ donc $\lambda f(b) + \lambda' f(b') = 0$

Puisque ni b ni b' n'appartiennent à D, aucun des 4 nombres λ, λ', $f(b)$, $f(b')$ n'est nul. λ et λ' étant positifs, $f(b)$ et $f(b')$ sont donc de signes contraires, c'est-à-dire que b et b' dont de part et d'autre de D. Comme D ne coupe ni B, ni B', D sépare B et B' donc $B \cap B' = \phi$.

I-2-d) Beaucoup de candidats n'ont donné qu'une réponse dans le cas $d < r + r'$, alors qu'il se subdivisait en deux : $d < |r - r'|$ et $|r - r'| < d < r + r'$.

Le cas $d > r + r'$ constitue un problème nouveau dont l'étude n'est pas demandée dans le cas général qui correspond à $B \cap B' = \phi$.

Il se ramène au cas précédemment traité de deux ensembles d'intersection non vide, en remarquant que l'ensemble des droites qui coupent les deux cercles B et B' à la fois est, à un ensemble de mesure nulle près, l'ensemble des droites qui coupent à la fois les enveloppes convexes fermées C et C' de $B \cup \{t\}$ et $B' \cup \{t'\}$ où t désigne le point commun aux tangentes intérieures à B et B'. On peut baser une démonstration de cette propriété sur les propositions suivantes : la frontière de C (resp. C') est constituée d'un arc du cercle B (resp. B') et de deux segments de droite, qu'on appellera ses parties rectilignes ; si une droite ne passant pas t coupe les deux parties rectilignes de la frontière de C (resp. C'), elle ne peut couper C' (resp. C) ; une droite ne passant par t qui coupe C' (resp. C) et une partie rectiligne de la frontière C (resp. C') coupe B (resp. B') ; (en effet, une telle droite ne peut être ni tangente à B, ni droite d'appui de C et elle ne peut recouper l'autre partie rectiligne de C ; par conséquent, elle coupe la frontière de C suivant l'arc du cercle B, c'est-à-dire qu'elle coupe B). Il suffit, en outre, de remarquer que l'ensemble des droites passant par un point donné est de mesure nulle. Cette remarque est également essentielle dans la question 3-b.

Le fait, que dans I une distinction soit établie entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}^*$ et que le cas des segments fasse l'objet de la question I-3-a), n'a pas intrigué de nombreux candidats qui, dans la réponse à cette question, ont pris l pour longueur du segment et trouvé $\frac{l}{L_A}$ pour probabilité de section par une droite, alors qu'il faut prendre $2l$ comme longueur de frontière. Cela se prouve soit en reprenant le calcul indiqué dans I-1), soit en considérant le segment fermé comme limite d'une suite décroissante de convexes, par exemple, la partie incluse dans A des rectangles de côtés parallèles à $[m,n]$ et dont m et n sont les milieux des deux autres côtés de longueur $\frac{2}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$.

Il ne semblait pas, a priori, que l'étude des cas particuliers figurant en I-2-d), I-3-c), II-1^er), II-2^e), dusse présenter des difficultés. Or, les copies montrent que trop de candidats ne savent pas distinguer nettement -et rationnellement- les cas possibles et présenter les calculs et les résultats sous une forme nette et simple. Bien peu de candidats ont pensé donner une certaine unité dans l'étude de I-3-c) ou II-2^e), en utilisant le fait que $E_{[m,n]}$ et $E_{[m',n']}$ sont deux événements dont l'intersection est de probabilité nulle si $[m,n]$ et $[m',n']$ sont portés par une même droite et n'ont au plus qu'une extrémité commune. Cela permet en effet de se ramener par exemple au cas où les segments ont pour origine le centre du cercle A.

Signalons en passant que le problème de l'aiguille de Buffon semble ignoré de beaucoup de candidats Ne pas donner avec précision l'hypothèse mathématique correspondant à l'expression «au hasard» dans ce problème traduit une méconnaissance totale de ce qu'est un modèle probabiliste.

A propos de la partie II, il faut insister particulièrement sur le fait que la question 3 n'a pas été résolue par presque tous les candidats.

Certains ont écrit jusqu'à une et deux pages sur la théorie des Probabilités conditionnelles, mais n'ont pas été capables de la mettre en pratique. Or, une idée simple aurait pu les guider : la Probabilité conditionnelle se définit comme un intégrand de Radon Nikodyn $\mathscr{T}_A$ mesurable, $\mathscr{T}_A \subset \mathscr{S}_A$. Or, un cas simple où il est facile d'obtenir une telle fonction (cf. l'étude des couples de variables aléatoires) est celui où Ω' est un espace produit, $\Omega' = \Omega'_1 \times \Omega'_2$ où $\mathscr{S}'$, tribu des ensembles mesurables sur Ω', est un produit $\mathscr{S}'_1 \oplus \mathscr{S}'_2$, $\mathscr{S}'_1$ et $\mathscr{S}'_2$ étant des tribus de parties de Ω'_1 et Ω'_2 et où la sous-tribu $\mathscr{T}'$ de $\mathscr{S}'$ par rapport à laquelle l'intégrand doit être mesurable, est $\mathscr{S}'_1 \oplus \{\Omega'_1\}$ (resp. $\{\Omega'_1\} \oplus \mathscr{S}'_2$). En effet, la $\mathscr{T}'$ - mesurabilité d'une fonction s'exprime alors par le fait qu'elle ne dépend que de la variable ω'_1 (resp. ω'_2).

Par conséquent, on peut se demander s'il existe une bijection de Ω dans un certain espace $\Omega' = \Omega'_1 \times \Omega'_2$ telle que les images des éléments de $\mathscr{T}$ soient des ensembles du type $S'_1 \times \Omega'_2$, $S'_1 \in \mathscr{S}'_1$ (ou $\Omega'_1 \times S'_2$, $S'_2 \in \mathscr{S}'_2$).

Or $\omega\,(u, v)$ et $\omega\,(u'v')$ sont équivalents si $u' = u = \frac{\pi}{2}$, ou si $u \neq \frac{\pi}{2}$ et $\frac{v}{\cos u} = \frac{v'}{\cos u'}$.

Par conséquent, si $T \in \mathscr{T}$ et si $\omega\,(u, v) \in T$, $u \neq \frac{\pi}{2}$

$$\{\, \omega'(u',v') : \frac{v'}{\cos u'} = \frac{v}{\cos u} \,\} \subset T$$

Ceci suggère d'effectuer la transformation ϕ de Ω dans $\Omega' = [\,0,\pi\,[\times \mathbb{R}$ telle que si ω a pour image (u, v) dans Π,

$$\phi\,(\omega) = (u, \frac{v}{\cos u}) \quad \text{si } u \neq \frac{\pi}{2}, \quad \phi\,(\omega) = (\frac{\pi}{2}, v) \quad \text{si } u = \frac{\pi}{2}.$$

donc $\omega \longmapsto \phi(\omega) = \omega' = (\omega'_1, \omega'_2)$ avec

$$\omega'_1 = u,\ \omega'_2 = v \ \text{ si } u = \frac{\pi}{2} \ \text{ et } \quad \omega'_2 = \frac{v}{\cos u} \quad \text{si } u \neq \frac{\pi}{2}$$

Cette transformation est bijective et mesurable.

Les images des éléments de $\mathscr{T}$ par cette transformation sont des ensembles du type :
$\left([0,\pi\,[\times I\right) - \left(\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}\right)$, où I est un borélien quelconque de $\mathbb{R}$, ou l'ensemble $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$.

Si b est une fonction numérique $\mathscr{T}$ mesurable sur Ω, alors $b = b' \circ \phi$ où b est une fonction numérique sur Ω' constante sur $\{\frac{\pi}{2}\} \times \mathbb{R}$ et sur tout ensemble $([o,\pi[- \{\frac{\pi}{2}\}) \times \{v'\}$

Le fait que $\mu(\{\omega : u = \frac{\pi}{2}\}) = 0$ permet d'écrire que la mesure des images Υ de μ par ϕ a pour densité sur Ω' la fonction $(\omega'_1, \omega'_2) \longmapsto (\cos \omega'_1)$.

La mesure Υ_A de μ_A par ϕ a donc pour densité $\frac{\cos \omega'_1}{2\pi}$ sur $\phi(\Omega_A)$ et 0 sur $\complement_{\pi'} \phi(\Omega_A)$

Il suffit enfin de remarquer qu'un intégrand n'étant défini qu'à un ensemble de mesure nulle près, on peut chercher, au lieu de b', une fonction b'' sur Ω' qui ne dépend que de ω'_2.

La question se ramène à un simple changement de variables dans une intégrale !

Dans II-4), si $\omega \in \Omega_A - \Omega_{Br}$, $Z_r(\omega) = 0$

si $\omega \in \Omega_{Br}$ et si $\omega = \omega(u, v)$, $Z_r(\omega) = 2\sqrt{r^2 - v^2}$

Manifestement $P(Z_r < 0) = 0 \qquad P(Z_r > 2r) = 0$

Si $0 \leqslant z \leqslant 2r$, l'événement $Z_r < z$ est l'événement $V > \sqrt{r^2 - \frac{z^2}{4}}$

On obtient ainsi facilement la loi de Z_r qui n'est pas absolument continue si $r < 1$. (masse $(1 - r)$ en 0).

Lorsqu'on prend $r = 1 - \frac{1}{n}$, on voit immédiatement qu'en chaque ω, $Z'_n(\omega)$ converge simplement vers $Z'(\omega)$ longueur de la corde découpée sur ω par A.

Il est alors facile de montrer que :

$$\forall\, \omega \in \Omega_A, \quad 0 < Z'(\omega) - Z'_n(\omega) < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}$$

d'où la convergence de Z'_n vers Z' et par suite, la convergence en probabilité.

On peut également s'appuyer uniquement sur le fait que : $\forall \omega$, $Z'(\omega) > Z'_n(\omega)$.

$$\text{d'où} \quad \int |Z'(\omega) - Z'_n(\omega)|\, dP_A(\omega) = \int (Z'(\omega) - Z'_n(\omega)\, dP_A(\omega)$$
$$= E(Z') - E(Z'_n).$$

De la convergence de $E(Z'_n)$ vers $E(Z')$, on déduit alors la convergence en moyenne, donc la convergence en probabilité de Z'_n vers Z'.

A ce sujet, on a trouvé dans les copies trop d'affirmations sans preuve (et à tort) que la loi obtenue est absolument continue et aussi une ignorance presque totale de la convergence en probabilité. Une seule candidate sur 178 a mené adroitement la démonstration jusqu'au bout en utilisant le théorème de Markov.

La partie III montre nettement l'insuffisance des candidats dans le domaine du Calcul intégral. Ceci rejoint la remarque faite dans II-3^e), à propos du changement de variables dans les intégrales.

La question III-3^e) demandait un peu de soin pour sa résolution.

Dans III-3^e-b), on prend évidemment le mot «coupe» dans son sens strict (comme dans II-3^e) : deux droites se coupent si elles ont un point commun et un seul. Cette 3^e question revient au fond à l'étude de l'application de $([o, \pi[- \{\frac{\pi}{2}\}) \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui associe à (u, v), $\frac{v}{\cos u}$. L'événement $V = \frac{\pi}{2}$ étant presque impossible, on obtient bien une distribution de probabilité. Devrait-il être besoin ici de répéter encore que les égalités «$T = \cos u$» et «$u = A u \cos T$» ne sont pas équivalentes, non plus que les inégalités «$\frac{V}{T} < a$» et «$V < a T$» ou qu'une densité de probabilité ne saurait être négative ?

Répartition des notes

HOMMES	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présents	21	92	58	45	30	15	8	2	3
Admissibles	0	3	13	27	25	14	8	2	3
Admis	0	1	2	12	17	13	8	2	3

Chez les hommes, le nombre des candidats probabilistes est passé de 165 en 1970 à 274, ce qui traduit un accroissement relatif très net. La moyenne générale est passée de 8 à 9,42 sur 40. On note cependant, par rapport à 1970, un nombre sensiblement égal de copies méritant 25 ou plus sur 40 et un nombre relativement plus faible de basses notes inférieures à 5 sur 40. L'épreuve de Probabilités est ainsi davantage préparée ; on souhaiterait cependant voir croître le pourcentage des bonnes et très bonnes copies.

FEMMES	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présentes	10	52	29	42	24	12	4	3	2
Admissibles	0	1	4	19	20	12	4	3	2
Admises	0	0	1	7	13	8	4	3	1

Le nombre des candidates est passé de 129 à 178.