# COMPOSITION DE MÉCANIQUE

N.B. — *Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies; en particulier les abréviations abusives risquent de ne pas être comprises. Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé.*

Les unités de longueur, de masse et de temps sont supposées fixées; l'unité d'angle est le radian; le temps est désigné par $t$. Le produit vectoriel du vecteur $\vec{U}$ par le vecteur $\vec{V}$ est noté $\vec{U} \times \vec{V}$. $O_1x_1y_1z_1$ est un repère orthonormé direct considéré comme absolu.

Par rapport à $O_1x_1y_1z_1$ se déplace une plaque plane (S). On appelle $m$ sa masse, G son centre d'inertie, $m\rho^2$ son moment d'inertie par rapport à G ($\rho$ longueur donnée). $Gxyz$ est un trièdre orthonormé direct lié à (S), $Gz$ étant perpendiculaire au plan de la plaque. On désigne par $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ les vecteurs unitaires des axes $Gx$, $Gy$, $Gz$ respectivement.

*La pesanteur n'est pas prise en considération.*

NOTA. — *Les trois parties* I, II, III *du problème sont indépendantes; elles pourront être traitées par les candidats dans l'ordre de leur choix.*

## I

Dans cette première partie la plaque (S) se meut dans l'espace. Si $\vec{\Omega}$ désigne le vecteur rotation instantanée de (S) par rapport à $O_1x_1y_1z_1$, on pose :

$$\vec{\Omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$$

On suppose que l'ellipsoïde central d'inertie de (S) est de révolution autour de $Gz$.

Deux insectes I et I′, de même masse M, assimilables à des points matériels, se déplacent sur l'axe $Gz$, supposé matérialisé et de masse négligeable, *suivant une loi donnée du temps,* en restant constamment symétriques par rapport à G; on notera $z(t)$ et $-z(t)$ les cotes respectives de I et I′ au temps $t$, $z$ étant une fonction *donnée*, positive et pourvue de dérivées première et seconde continues. On se propose d'étudier le mouvement du système matériel ($\Sigma$) constitué par la plaque (S) et les deux insectes I et I′.

1° Que peut-on dire du mouvement du point G par rapport au repère $O_1x_1y_1z_1$, et du vecteur $\vec{\sigma}$, moment cinétique en G du système ($\Sigma$) par rapport à ce même repère?

2° Écrire le système différentiel permettant de calculer $p$, $q$, $r$ en fonction de $t$ et montrer que son intégration se ramène à une quadrature.

3° Exprimer, en fonction de $z(t)$, $p$, $q$, $r$ et de leurs dérivées par rapport au temps, les composantes sur les axes $Gx$, $Gy$, $Gz$ des réactions de l'axe $Gz$ sur les insectes I et I′.

4° On suppose, dans cette question seulement, l'axe $O_1z_1$ parallèle au vecteur $\vec{\sigma}$ (supposé non nul) et de même sens que lui. Comment peut-on calculer en fonction de $t$ les angles d'Euler $\psi$, $\theta$, $\varphi$ du trièdre $Gxyz$ par rapport au trièdre $O_1x_1y_1z_1$?

## II

*Dans cette seconde partie, les insectes* I *et* I′ *sont supprimés. On rappelle que la pesanteur n'est pas prise en considération.*

La plaque (S) est assujettie par une liaison bilatérale à glisser sans frottement sur le plan $x_1O_1y_1$ (les plans $xGy$ et $x_1O_1y_1$ restent donc en coïncidence). Au point P de la plaque défini par $\overrightarrow{GP} = a\vec{i}$ ($a$ longueur donnée) sont appliquées deux forces dont les supports restent dans le plan $xGy$. La première de ces forces a pour intensité vectorielle $m\vec{F}$, $\vec{F}$ étant un vecteur dont les composantes X, Y sur $Gx$ et $Gy$ sont des *constantes* données. La seconde force a pour intensité vectorielle $m\lambda\vec{k} \times \vec{V}(P)$, où $\lambda$ est une constante donnée non nulle et $\vec{V}(P)$ le vecteur vitesse de P par rapport au repère $O_1x_1y_1z_1$.

On désigne par $u$ et $v$ les composantes sur $Gx$ et $Gy$ respectivement du vecteur vitesse de G par rapport au repère $O_1x_1y_1z_1$ et par $r\vec{k}$ le vecteur rotation instantanée de la plaque (S) par rapport à ce même repère.

### A

1° Écrire le système d'équations différentielles du premier ordre permettant de calculer $u$, $v$, $r$ en fonction de $t$ (on ne cherchera pas à intégrer ce système).

2° Étudier la possibilité de mouvements de la plaque (S) dans lesquels $r$ reste constant et non nul.

*a.* Que peut-on dire de ces mouvements dans le cas où $r$ est différent de $\lambda$?

*b.* Examiner le cas $r = \lambda$. Lorsque Y n'est pas nul, déterminer la roulante et la base du mouvement du plan $xGy$ sur le plan $x_1O_1y_1$.

### B

1° Question préliminaire (*le candidat qui ne parviendrait pas à résoudre cette question pourra en admettre les résultats dans la suite*).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées d'un point $x$ d'un espace euclidien réel de dimension $n$; on pose : $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, et on note $\omega$ le point de coordonnées nulles.

*a.* On note W une fonction réelle définie dans un voisinage de l'origine $\omega$ et nulle en ce point. On conviendra de dire que *cette fonction* W *est définie positive à l'origine, s'il existe un nombre $h > 0$ tel que* $W(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *soit strictement positif en tout point $x$ satisfaisant à :* $0 < \|x\| < h$.

Démontrer que, si la fonction W admet au point $\omega$ un développement limité d'ordre supérieur ou égal à deux dont les termes de plus bas degré constituent une forme quadratique définie positive, alors W est définie positive à l'origine.

*b.* Soit le système différentiel :

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

où les $f_i$ sont des fonctions réelles, données, nulles au point $\omega$ et satisfaisant à une condition de Lipschitz dans une boule $\|x\| \leqslant H$ (H constante positive).

Ce système admet la solution triviale $x = 0$. On rappelle que cette dernière est dite *stable* si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre $\eta > 0$

tel que toute solution $x(t)$ du système satisfaisant à $\|x(0)\| < \eta$ vérifie l'inégalité $\|x(t)\| < \varepsilon$ pour tout $t \geqslant 0$; dans le cas contraire la solution $x = 0$ est dite instable.

Démontrer que, si le système différentiel admet une intégrale première $W(x_1, x_2, ..., x_n)$ définie positive à l'origine, alors la solution triviale du système est stable (on pourra s'inspirer de la démonstration du théorème de Lagrange-Dirichlet sur la stabilité d'un équilibre).

2° Montrer que, parmi les mouvements de (S), il existe un mouvement de translation rectiligne et uniforme, et un seul. Dans la suite il sera appelé mouvement $\mathfrak{M}$. Calculer les valeurs correspondantes $u_0$ et $v_0$ de $u$ et $v$.

3° On pose : $u = u_0 + \Delta u, \qquad v = v_0 + \Delta v.$

Écrire le système différentiel ($\mathfrak{S}$) vérifié par les fonctions $\Delta u$, $\Delta v$, $r$.

*On dit que le mouvement $\mathfrak{M}$ est stable (resp. instable) par rapport aux vitesses si la solution triviale du système ($\mathfrak{S}$) est stable (resp. instable)* [voir question préliminaire].

4° En linéarisant le système ($\mathfrak{S}$), donner des conditions suffisantes d'instabilité du mouvement $\mathfrak{M}$ par rapport aux vitesses.

5° En utilisant la question préliminaire, démontrer que, si l'on a $Y = 0$ et $X < \lambda^2\left(a + \dfrac{\rho^2}{a}\right)$, le mouvement $\mathfrak{M}$ est stable par rapport aux vitesses.

(On montrera que, dans ces conditions, on peut former deux intégrales premières $W_1$ et $W_2$ du système ($\mathfrak{S}$) ayant les propriétés suivantes : $W_2$ est une forme quadratique en $\Delta u$, $\Delta v$, $r$ et il existe une infinité de nombres $\nu$ tels que la fonction $W = W_2 + \nu W_1^2$ soit définie positive à l'origine.)

## III

*Dans cette troisième partie, les deux insectes* I *et* I' *de la première partie et les forces* $m\vec{F}$ *et* $m\lambda\vec{k}\times\vec{V}(P)$ *de la seconde partie sont supprimés. On rappelle que la pesanteur n'est pas prise en considération.*

La plaque (S) est encore assujettie par une liaison bilatérale à glisser sans frottement sur le plan $x_1O_1y_1$.

Au point P défini par $\overrightarrow{GP} = a\,\vec{i}$ ($a$ longueur donnée) est placée une surcharge qui est larguée (c'est-à-dire éjectée avec une vitesse nulle relativement à la plaque) de façon continue selon une loi donnée : on note $\mu(t)$ la masse de la surcharge encore attachée en P à l'instant $t$ [$\mu$ fonction donnée, positive, dérivable, décroissante de $t$]. On suppose que le largage se fait sans intervention de forces extérieures et que la matière une fois larguée n'exerce aucune action sur (S).

1° Écrire les équations du mouvement de (S) [on montrera en particulier que $r$ reste constant].

2° On prend : $$\mu(t) = \frac{m(\alpha - \beta t)}{1 - \alpha + \beta t} \qquad 0 \leqslant t < \frac{\alpha}{\beta}$$

où $\alpha$ et $\beta$ sont des constantes données ($0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$).

On suppose que les axes $O_1x_1$, $O_1y_1$ sont les positions des axes $Gx$, $Gy$ respectivement à l'instant $t = 0$, et que la plaque (S) est lancée à cet instant dans les conditions suivantes : sa vitesse angulaire de rotation $r$ est différente de zéro et le vecteur vitesse de G dans le repère $O_1x_1y_1z_1$ est $-\alpha a r\vec{j}$.

Étudier le mouvement de la plaque (S) pour $t$ variant de 0 à $+\infty$; déterminer la roulante et la base de ce mouvement.

Le sujet se distinguait assez nettement de ceux qui avaient été proposés précédemment.

Il a été inspiré par des travaux assez récents concernant l'étude de la stabilité d'un mouvement au moyen de la méthode de Liapounoff (Partie II) et le mouvement d'un corps de masse variable (Partie III).

La première partie, accessible à un bon étudiant du premier cycle, était destinée à contrôler les connaissances des candidats sur les notions fondamentales de Mécanique générale. Les résultats sont décevants et ce n'est que grâce à un barème particulièrement généreux que quelques candidats ont atteint ou dépassé la moyenne.

## I

1° - $(\Sigma)$ n'est soumis à aucune force extérieure. G a donc un mouvement rectiligne uniforme et $\vec{\sigma}$ reste constant.

2° - On a :

$$\vec{\sigma} = \frac{m\rho^2}{2}(p\vec{i} + q\vec{j}) + m\rho^2 r\vec{k} + \overrightarrow{MGI} \times \vec{V}(I) + \overrightarrow{MGI'} \times \vec{V}(I')$$

[ $\vec{V}(I)$ = vitesse de I dans son mouvement autour de G, soit $\frac{dz}{dt}\vec{k} + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{GI}$ ; $\vec{V}(I') = -\vec{V}(I)$ ].

En exprimant que la dérivée temporelle absolue de $\vec{\sigma}$ est nulle, on obtient ainsi, en utilisant le repère $Gxyz$ :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)p' + 4Mzz'p + \left(\frac{m\rho^2}{2} - 2Mz^2\right)qr = 0 \\ \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)q' + 4Mzz'q - \left(\frac{m\rho^2}{2} - 2Mz^2\right)rp = 0 \\ m\rho^2 r' = 0 \end{array}\right.$$

ce qui donne $r = r_0$ et par des combinaisons simples :

$$\left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)\sqrt{p^2+q^2} = cte \quad ; \quad \text{Arctg}\,\frac{q}{p} = r_0 \int \frac{\frac{m\rho^2}{2} - 2Mz^2}{\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2}\,dt + cte$$

3° - Les réactions se calculent immédiatement en appliquant le principe fondamental aux insectes I et I'.

4° - En posant $\sigma = \|\vec{\sigma}\|$, on a facilement :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)p = \sigma \, Sin\,\theta \, Sin\,\varphi \\ \left(\frac{m\rho^2}{2} + 2Mz^2\right)q = \sigma \, Sin\,\theta \, Cos\,\psi \\ m\rho^2 r_0 = \sigma \, Cos\,\theta \end{array}\right.$$

$\theta$ est donc constant ; $\varphi$ est déterminé par son sinus et son cosinus ; enfin, on a :

$$\psi = \sigma \int \frac{dt}{\frac{m\rho^2}{2} + 2 Mz^2} + cte ,$$

intégrale qui se ramène à celle qui donne Arc tg $\frac{q}{p}$.

## II - A

1° - Les théorèmes généraux donnent aisément les équations :

$$u' - rv = X - \lambda(v + ar) \; ; \; v' + ru = Y + \lambda u \; ; \; \rho^2 r' = a(Y + \lambda u)$$

2° - a) La condition de possibilité est $Y = 0$. Il s'agit de rotations uniformes,

car $u = 0$ , $v = \dfrac{X - \lambda ar}{\lambda - r}$ ; $r = Cte \neq \lambda$

b) La condition de possibilité est $X = a\lambda^2$

Pour $Y = 0$ , on obtient des rotations uniformes.

Pour $Y \neq 0$, on a : $u = -\dfrac{Y}{\lambda}$ ; $v = Yt + Cte$ ; $r = \lambda$.

La roulante est la droite $y = -\dfrac{Y^2}{\lambda^2}$ parcourue avec la vitesse $\dfrac{Y}{\lambda}$ ; la base est un cercle de rayon $\dfrac{|Y|}{\lambda^2}$.

## II - B

1° - **Question préliminaire**

a) Il suffit de savoir qu'une forme quadratique définie positive est minorée par $K \|x\|^2$ où K est une constante convenable strictement positive.

b) A l'agrégation masculine un seul candidat a abordé cette question, avec succès d'ailleurs.

Soit $\epsilon > 0$ , inférieur à H. Sur $\|x\| = \epsilon$, W admet une borne inférieure $W_m > 0$ et atteinte. W étant nulle à l'origine et continue en ce point, à $W_m > 0$, on peut faire correspondre $\eta > 0$ et $< \epsilon$ tel que $\|x(0)\| < \eta$ entraîne $0 < W[x(0)] < W_m$. Soit alors $x(t)$ la solution du système, unique en vertu des hypothèses, «partant» de $x(0)$ à l'instant $t = 0$. Sur la «trajectoire» du point $x(t)$ , $W[x(t)] = W[x(0)] < W_m$ ; cette trajectoire ne peut donc atteindre la sphère $\|x\| = \epsilon$ où $W(x) \geq W_m$. Donc $\|x(t)\|$ reste inférieur à $\epsilon$ pour toute valeur de $t$.

2° - Le mouvement $\mathfrak{M}$ est caractérisé par $r_0 = 0$ , $\mu_0 = -\dfrac{Y}{\lambda}$ , $v_0 = \dfrac{X}{\lambda}$.

3°) et 4°) - On obtient immédiatement ($\mathcal{S}$) qu'on linéarise aisément.

L'équation caractéristique s'écrit :

$$\rho^2 s^3 + [\lambda^2 (a^2 + \rho^2) - aX] s + a\lambda Y = 0$$

Pour $Y \neq 0$ ou pour $Y = 0$ , $X > \lambda^2 (a + \dfrac{\rho_2}{a})$, l'une de ces racines au moins a sa partie réelle strictement positive, ce qui entraîne l'instabilité.

5° - Pour $Y = 0$, $X < \lambda^2 (a + \frac{\rho^2}{a})$, les trois racines ont leur partie réelle nulle, ce qui ne permet pas de conclure. Le but de la question est précisément de montrer que la stabilité est assurée. Le système (S) admet les intégrales premières : $W_1 \equiv \Delta v - \frac{\rho^2}{a} r + \frac{\rho^2}{2a\lambda} r^2$

$$W_2 \equiv (\Delta u)^2 + (\Delta v)^2 + \frac{\rho^2(a\lambda^2 - X)}{a\lambda^2} r^2$$

$W \equiv W_2 + \nu W_1^2$ est aussi une intégrale première. D'après la question préliminaire, on obtient des conditions suffisantes de stabilité en exprimant que la forme quadratique qui constitue les termes de plus bas degré de W est définie positive. Ces conditions s'écrivent :

$$\nu + 1 > 0 \; ; \; \frac{\nu}{\nu + 1} > \frac{a(X - a\lambda^2)}{\lambda^2 \rho^2}$$

En vertu de l'hypothèse, le second membre de la deuxième inégalité est strictement inférieur à 1. Par suite, les inégalités sont remplies pour tous les nombres $\nu$ supérieurs à un certain nombre $\nu_0 > -1$ et qu'on peut déterminer graphiquement.

## III

Cette partie a été abordée par de nombreux candidats. Presque tous ont commis la grave erreur d'appliquer froidement les théorèmes généraux à un corps de masse variable. Quelques-uns d'entre eux ont bien considéré un système conservant une masse constante, mais leur raisonnement, bien que conduisant à une équation exacte, a été insuffisant ou incorrect. Rares sont les candidats (deux à l'agrégation masculine) qui ont donné une démonstration valable.

1° - Soit $\vec{R}(t)$ la réaction de la plaque sur la surcharge à l'instant $t$.

Les théorèmes généraux appliqués à la plaque seule donnent :

$$m\vec{\Gamma}(G) = -\vec{R}(t) \; ; \; m\rho^2 r'\vec{k} = -\vec{GP} \times \vec{R}(t)$$

La quantité de mouvement absolue de la surcharge à l'instant $t$ est $\mu(t)\,\vec{V}(P)(t)$.

A l'instant $t + \Delta t (\Delta t > 0$ petit), le système constitué par les mêmes éléments matériels se décompose en deux parties : le reste de la surcharge de quantité de mouvement absolue

$\mu(t+\Delta t)\,\vec{V}(P)(t+\Delta t)$ et la matière éjectée entre les instants $t$ et $t + \Delta t$, de masse totale $\mu(t) - \mu(t+\Delta t)$, dont les éléments ont une vitesse de la forme $\vec{V}(P)(t) + \vec{o}(\Delta t)$ ($\vec{o}(\Delta t)$ étant un vecteur tendant vers zéro avec $\Delta t$) si l'on néglige les interactions de ces éléments et dont la quantité de mouvement absolue peut s'écrire par conséquent :

$$[\mu(t) - \mu(t+\Delta t)]\,[\vec{V}(P)(t) + \vec{o}(\Delta t)]$$

On a donc l'équation :

$$\lim_{\Delta t \to o} \frac{\mu(t+\Delta t)\,\vec{V}(P)(t+\Delta t) - \mu(t)\,\vec{V}(P)(t)}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to o} \frac{\mu(t+\Delta t) - \mu(t)}{\Delta t}[\vec{V}(G)(t) + \vec{o}(\Delta t)] = \vec{R}(t)$$

Soit :

$$\frac{d}{dt}[\mu(t)\vec{V}(P)(t)] - \frac{d\mu}{dt}\vec{V}(P)(t) = \vec{R}(t)$$

Ou enfin :

$$\mu(t)\,\vec{\Gamma}(P) = \vec{R}(t)$$

(Bien entendu, une vitesse relative d'éjection non nulle aurait provoqué l'apparition d'un terme supplémentaire au second membre). L'élimination de $\vec{R}(t)$ fournit les deux équations :

$$m\vec{\Gamma} + \mu(t)\vec{\Gamma}(P) = 0 \quad ; \quad m\rho^2 r'\vec{k} = \mu(t)\, a\,\vec{i} \times \vec{\Gamma}(P)$$

qui jointes à la relation :

$$\vec{\Gamma}(P) = \vec{\Gamma}(G) - ar^2\vec{i} + ar'\vec{j} \quad ,$$

donnent :

$$r = constante \quad ; \quad [\, m + \mu(t)\,]\, \vec{\Gamma}(G) - \mu(t)\, ar^2\vec{i} = 0$$

2° - Le mouvement se décompose en deux phases :

<u>1re phase</u> : $0 \leqslant t < \dfrac{\alpha}{\beta}$ .

On a : $\vec{\Gamma}(G) = ar^2(\alpha - \beta t)\,\vec{i}$

Donc : $u = a\beta(\cos rt - 1)\ ;\ v = a\beta(rt - \sin rt) - ar\alpha$

La roulante et la base sont des arcs de cycloïde.

<u>2e phase</u> : $t > \dfrac{\alpha}{\beta}$

La plaque est libre ; $r$ reste constant G est animé d'un mouvement rectiligne uniforme. Le mouvement est donc un mouvement cycloïdal uniforme.

**Répartition des notes**

HOMMES

| | 0 | 1 à 5 | 6 à 10 | 11 à 15 | 16 à 20 | 21 à 25 | 26 à 30 | 31 à 35 | 36 à 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Présents | 40 | 53 | 52 | 43 | 27 | 8 | | | |
| Admissibles | 0 | 4 | 15 | 29 | 23 | 8 | | | |
| Admis | 0 | 0 | 4 | 13 | 11 | 4 | | | |

FEMMES

| | 0 | 1 à 5 | 6 à 10 | 11 à 15 | 16 à 20 | 21 à 25 | 26 à 30 | 31 à 35 | 36 à 40 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Présentes | 15 | 32 | 22 | 15 | 18 | 8 | 2 | | 1 |
| Admissibles | 0 | 3 | 4 | 10 | 11 | 8 | 2 | | 1 |
| Admises | 0 | 0 | 1 | 3 | 3 | 5 | 2 | | 1 |