HOMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présents	97 x	85	117	134	118	84	55	38	20	12	10	10
Admissibles	0	1	3	23	46	58	45	38	20	12	10	10
Admis	0	0	2	6	16	25	19	29	18	12	9	10

x dont quatorze 0.

FEMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présentes	42 xx	36	80	97	107	59	33	16	9	2	2	1
Admissibles	0	0	1	22	53	50	32	16	9	2	2	1
Admises	0	0	0	11	17	26	21	14	9	2	2	1

xx dont un 0

COMPOSITION D'ANALYSE NUMÉRIQUE

N. B. — *Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies; en particulier les abréviations abusives risquent de n'être pas comprises. Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé. Les questions posées aux candidats sont désignées dans le texte par les symboles* (Q_i) $(i = 1, 2, ..., 37)$ *qui se détachent dans la marge.*

Tous les scalaires du problème sont réels.

NOTATIONS. — Les éléments $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathrm{R}^n$ sont identifiés à des matrices colonnes à n lignes; on pose pour $u,v \in \mathrm{R}^n$

$$(u\,,v)_n = \sum_{i=1}^{n} u_i . v_i$$

$$\| u \|_n = (u\,,u)_n^{1/2}$$

$$\{\{ u \}\}_n = \sum_{i=1}^{n} | u_i |$$

I. PRÉLIMINAIRES

1° Soit U un sous-ensemble convexe, fermé de R^n. On désigne par P l'opérateur projection de R^n sur U; Pw est le point de U réalisant le minimum de la distance de w à U.

Q1 : Montrer que les relations (1) *et* (2) *sont équivalentes :*

(1) $\quad u = \mathrm{P}w.$

(2) $\quad \begin{cases} u \in U \\ (w - u, v - u)_n \leqslant 0 \qquad \forall v \in U. \end{cases}$

Q2 : Montrer que P *vérifie :*

(3) $\quad \| \mathrm{P}w_1 - \mathrm{P}w_2 \|_n \leqslant \| w_1 - w_2 \|_n \qquad \forall\, w_1,w_2 \in \mathrm{R}^n.$

2° Soit $A = (a_{i,j})$ $i, j = 1, \ldots, n$ une matrice symétrique et définie positive.

$$\begin{cases} a_{i,j} = a_{j,i} & \forall i,j, \text{ ou encore, } A = A^* \\ (Av, v)_n > 0 & \forall v \in R^n,\ v \neq 0 \end{cases}$$

Q3 : Démontrer qu'il existe $\alpha > 0$ *tel que :*

$$(4) \qquad (Av, v)_n \geqslant \alpha \| v \|_n^2 \qquad \forall v \in R^n.$$

3° Soit J une fonction numérique **convexe** définie sur R^n.

Q4 : Démontrer que tout minimum local est un minimum global : de façon plus précise, démontrer que (5) *entraîne* (6) :

$$(5) \qquad \text{il existe } \varepsilon > 0 \text{ tel que } J(u) \leqslant J(v) \text{ pour } v \in R^n, \; \| v - u \| \leqslant \varepsilon.$$

$$(6) \qquad J(u) \leqslant J(v) \qquad \forall v \in R^n.$$

4° On donne une matrice $A = (a_{i,j})$ $i, j = 1, \ldots, n$ vérifiant :

$$\begin{cases} A = A^* \\ (Av, v)_n \geqslant 0 & \forall v \in R^n, \end{cases}$$

un élément $f \in R^n$ et un sous-ensemble U convexe et fermé dans R^n; on pose :

$$(7) \qquad J_0(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_n - (f, v)_n$$

Q5 : Montrer que les relations (8) *et* (9) *sont équivalentes :*

$$(8) \quad \begin{cases} u \in U \\ J_0(u) \leqslant J_0(v) & \forall v \in U \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} u \in U \\ (Au - f, v - u)_n \geqslant 0 & \forall v \in U \end{cases}$$

Q6 : Que représente $Au - f$ *pour la fonction* $J_0 : u \to J_0(u)$.

Soit J_1 une fonction convexe définie sur R^n; on pose :

$$J(v) = J_0(v) + J_1(v)$$

Q7 : Montrer que les relations (10) *et* (11) *sont équivalentes :*

$$(10) \quad \begin{cases} u \in U \\ J(u) \leqslant J(v) & \forall v \in U \end{cases}$$

$$(11) \quad \begin{cases} u \in U \\ (Au - f, v - u)_n + J_1(v) - J_1(u) \geqslant 0 & \forall v \in U \end{cases}$$

II

1° On donne :

— une matrice $A = (a_{i,j})$ $i,j = 1, \ldots, n$ qui vérifie :

$$(12) \quad \begin{cases} A = A^* \\ (Av, v)_n \geqslant \alpha \| v \|_n^2 & \forall v \in R^n, \quad \alpha > 0 \end{cases}$$

— un ensemble U convexe et fermé dans R^n

— un élément $f \in R^n$.

On pose :

$$J_0(v) = \frac{1}{2}(Av, v)_n - (f, v)_n$$

Problème $\mathfrak{P}_0$: Déterminer u tel que :

$$(13) \quad \begin{cases} u \in U \\ J_0(u) \leqslant J_0(v) & \forall v \in U \end{cases}$$

Q8 : Montrer que le problème $\mathcal{P}_0$ *a une solution et une seule.*

Q9 : Donner une relation équivalente à (13).

On construit une suite u^m par le procédé suivant :

$$(14) \quad \begin{cases} u^0 \text{ donné dans } U \\ u^{m+1} = \mathrm{P}(u^m - \rho(\mathrm{A}u^m - f)) \qquad m = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

(P a été introduit au début de I. 1°)

Q10 : Démontrer qu'il existe $\bar{\rho}$ *tel que pour* ρ *fixé vérifiant :*

$$0 < \rho < \bar{\rho}$$

la suite u^m *converge vers* u*, solution du problème* $\mathcal{P}_0$*, lorsque* m *tend vers l'infini.*

2° En plus des éléments de II, 1° (excepté l'ensemble U qui ne sera plus utilisé), on donne une matrice $\mathrm{B} = (b_{i,j})$ $\quad i = 1, \ldots, k,\ j = 1, \ldots, n$ (k lignes et n colonnes) et un élément $g \in \mathrm{R}^k$; on pose :

$$\mathrm{J}_1(v) = \| \mathrm{B}v - g \|_k = \sum_{i=1}^{k} |(\mathrm{B}v - g)_i|$$

$$(15) \qquad \mathrm{J}(v) = \mathrm{J}_0(v) + \mathrm{J}_1(v)$$

Problème $\mathcal{P}$: Déterminer u tel que :

$$(16) \quad \begin{cases} u \in \mathrm{R}^n \\ \mathrm{J}(u) \leqslant \mathrm{J}(v) \qquad \forall v \in \mathrm{R}^n \end{cases}$$

Q11 : Démontrer que :

i. *La fonction* J *est* **strictement convexe**

ii. $\displaystyle \lim_{\|v\|_n \to +\infty} \mathrm{J}(v) = +\infty.$

Q12 : Montrer que le problème $\mathcal{P}$ *a une solution et une seule.*

Q13 : Donner une relation équivalente à (16).

3° On donne :

— une matrice $\mathcal{A} = (\alpha_{i,j})$ $\quad i, j = 1, \ldots, k$ qui vérifie :

$$(17) \quad \begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}^*, \quad \mathcal{A} \neq 0 \\ (\mathcal{A}\mu, \mu)_k \geqslant 0 \qquad \forall \mu \in \mathrm{R}^k \end{cases}$$

— un élément $\mathcal{F} \in \mathrm{R}^k$

— un ensemble Λ convexe, fermé et borné dans R^k.

On pose :

$$(18) \qquad \mathrm{J}^*(\mu) = \frac{1}{2}(\mathcal{A}\mu, \mu)_k - (\mathcal{F}, \mu)_k$$

Problème $\mathcal{P}^*$: Déterminer λ tel que :

$$(19) \quad \begin{cases} \lambda \in \Lambda \\ \mathrm{J}^*(\lambda) \leqslant \mathrm{J}^*(\mu) \qquad \forall \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q14 : Montrer que le problème $\mathcal{P}^*$ *a au moins une solution* λ.

Q15 : Donner un exemple où le problème $\mathcal{P}^*$ *a plus d'une solution.*

Q16 : Donner une relation équivalente à (19).

Nous allons étudier maintenant deux méthodes itératives qui nous permettront d'approcher une solution du problème $\mathcal{P}^*$.

MÉTHODE 1 : on construit la suite λ^m par :

$$(20) \quad \begin{cases} \lambda^0 \text{ donné dans } \Lambda \\ \lambda^{m+1} = P(\lambda^m - \rho(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F})) \qquad m = 0, 1, \ldots \end{cases}$$

où le nombre positif ρ sera choisi plus loin et où P désigne la projection de R^k sur Λ.

Q17 : Montrer que :

$$(21) \quad \begin{cases} J^*(\lambda^{m+1}) = J^*(\lambda^m) + (\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \Delta\lambda^m)_k + \dfrac{1}{2}(\mathcal{A}\Delta\lambda^m, \Delta\lambda^m)_k \\ \Delta\lambda^m = \lambda^{m+1} - \lambda^m \end{cases}$$

Q18 : Montrer que :

$$(22) \qquad \rho(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \Delta\lambda^m)_k + \|\Delta\lambda^m\|_k^2 \leqslant 0$$

Q19 : Montrer que pour ρ vérifiant :

$$(23) \qquad 0 < \rho < \frac{2}{\|\mathcal{A}\|}, \quad \|\mathcal{A}\| = \max_{\|\mu\|_k = 1} \|\mathcal{A}\mu\|_k$$

lorsque $m \to +\infty$

i. *la suite* $J^*(\lambda^m)$ est décroissante

ii. *la suite $\Delta\lambda^m$ tend vers* 0.

Q20 : Montrer que tout point adhérent à la suite λ^m est une solution de $\mathcal{P}^*$.

MÉTHODE 2 : λ^0 est toujours donné dans Λ; on va construire λ^{m+1} à partir de $\lambda^m \in \Lambda$ par le procédé suivant : soit ν^m tel que :

$$(24) \quad \begin{cases} \nu^m \in \Lambda \\ (\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \nu^m)_k \leqslant (\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \mu)_k \qquad \forall \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q21 : Existe-t-il ν^m vérifiant (24)?

Soit ρ un nombre fixe positif qui sera choisi plus loin. On pose :

$$(25) \quad \begin{cases} \rho^m = \min \left\{ 1, -\dfrac{1}{\rho}(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \nu^m - \lambda^m)_k \right\} \\ \lambda^{m+1} = \lambda^m + \rho^m(\nu^m - \lambda^m) \end{cases}$$

Q22 : i. *quel est le signe de ρ^m?*

ii. *étudier le cas* $\rho^m = 0$.

Soit d tel que :

$$(26) \qquad \lambda, \mu \in \Lambda \Rightarrow \|\lambda - \mu\|_k \leqslant d < +\infty$$

Q23 : Montrer que pour m assez grand on a :

$$(27) \quad J^*(\lambda^{m+1}) \leqslant J^*(\lambda^m) - \frac{1}{\rho^2}\left(\rho - \frac{d^2}{2}\|\mathcal{A}\|\right)(\mathcal{A}\lambda^m - \mathcal{F}, \nu^m - \lambda^m)_k^2$$

en ayant choisi ρ tel que :

$$(28) \qquad \rho > \frac{1}{2}\|\mathcal{A}\| d^2$$

Q24 : Montrer que tout point adhérent λ à la suite λ^m est une solution du problème $\mathcal{P}^*$.

III

On rappelle l'énoncé du théorème du « minimax » en dimension finie :

Les données et hypothèses :

- U et Λ sont des ensembles convexes, fermés et bornés, U dans R^n et Λ dans R^k
- $L : U \times \Lambda \to \mathrm{R}$; L est une application continue de $U \times \Lambda$ dans R
- $\forall \mu \in \Lambda$, l'application $v \to L(v,\mu)$ est convexe
- $\forall v \in U$, l'application $\mu \to L(v,\mu)$ est concave (c'est-à-dire : $\mu \to -L(v,\mu)$ convexe).

La conclusion : il existe un couple u, λ tel que :

$$(29)\quad \begin{cases} (u,\lambda) \in U \times \Lambda \\ L(u,\mu) \leqslant L(u,\lambda) \leqslant L(v,\lambda) \\ \forall\, v \in U \;,\; \forall\, \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q25 : Démontrer que :

$$(30)\quad L(u,\lambda) = \min_{v \in U} \max_{\mu \in \Lambda} L(v,\mu) = \max_{\mu \in \Lambda} \min_{v \in U} L(v,\mu)$$

On pose (dans toute la suite) :

$$(31)\qquad L(v,\mu) = \mathrm{J}_0(v) + (\mathrm{B}v - g,\mu)_k$$

ou encore :

$$L(v,\mu) = \frac{1}{2}(\mathrm{A}v, v)_n - (f, v)_n + (\mathrm{B}v - g, \mu)_k$$

(la matrice A vérifie les relations (12))

$$(32)\qquad \Lambda = \{\, \mu \mid \mu \in \mathrm{R}^k, \; |\mu_i| \leqslant 1, \quad i = 1, \ldots, k \,\}$$

Q26 : Peut-on utiliser le théorème du minimax avec les éléments $U = \mathrm{R}^n$, Λ *défini par* (32) *et* L *défini par* (31) ?

Soit p un nombre positif (destiné à tendre vers $+\infty$); on pose :

$$U_p = \{\, v \mid v \in \mathrm{R}^n, \; \| v \|_n \leqslant p \,\}$$

Q27 : Montrer qu'on peut trouver un couple u^p, λ^p *tel que :*

$$(33)\quad \begin{cases} (u^p, \lambda^p) \in U_p \times \Lambda \\ L(u^p, \mu) \leqslant L(u^p, \lambda^p) \leqslant L(v, \lambda^p) \\ \forall v \in U_p \;,\; \forall\, \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q28 : Quel est le signe de $(\mathrm{B}u^p - g, \lambda^p)_k$?

Q29 : Démontrer qu'on peut trouver des constantes C_0 *et* C_1 *(indépendantes de p) telles que :*

$$(34)\quad \begin{cases} \mathrm{J}_0(u^p) \leqslant \mathrm{C}_0 \\ \| u^p \|_n \leqslant \mathrm{C}_1 \end{cases}$$

Q30 : Démontrer qu'on peut trouver un couple u, λ *tel que :*

$$(35)\quad \begin{cases} (u,\lambda) \in \mathrm{R}^n \times \Lambda \\ L(u,\mu) \leqslant L(u,\lambda) \leqslant L(v,\lambda) \\ \forall\, v \in \mathrm{R}^n \;,\; \forall\, \mu \in \Lambda \end{cases}$$

Q31 : Démontrer que :

$$(36)\qquad \lambda_i |(\mathrm{B}u - g)_i| = (\mathrm{B}u - g)_i \qquad i = 1, \ldots, k$$

Q32 : Démontrer que, si u est solution de (35), *alors u est aussi solution du problème $\mathcal{P}$ c'est-à-dire de* (16). *Conséquence?*

Q33 : Démontrer que :

$$\text{(37)} \qquad J(u) = \min_{v \in \mathbf{R}^n} \max_{\mu \in \Lambda} L(v, \mu) = \max_{\mu \in \Lambda} \min_{v \in \mathbf{R}^n} L(v, \mu)$$

Q34 : Que peut-on dire des problèmes « $\min_{v \in \mathbf{R}^n} J(v)$ » *et* « $\min_{v \in \mathbf{R}^n} \max_{\mu \in \Lambda} L(v, \mu)$ »?

On désigne par $\mathcal{P}^*$ le problème $\max_{\mu \in \Lambda} \min_{v \in \mathbf{R}^n} L(v, \mu)$

Q35 : Démontrer que le problème $\mathcal{P}^*$ peut se mettre sous la forme :

$$« -\min_{\mu \in \Lambda} \left[\frac{1}{2}(\mathcal{A}\mu, \mu)_k - (\mathcal{F}, \mu)_k + C_2\right] »$$

ou encore :

$$« \min_{\mu \in \Lambda} \left[\frac{1}{2}(\mathcal{A}\mu, \mu)_k - (\mathcal{F}, \mu)_k\right] »$$

au signe près et à une constante additive près. On demande d'expliciter $\mathcal{A}$ et $\mathcal{F}$.

Q36 : i. *donner des propriétés de $\mathcal{A}$.*

ii. *peut-on approcher une solution λ du problème $\mathcal{P}^*$ à l'aide des méthodes 1 et 2 du n° II.*

Soit λ^m une suite construite à l'aide d'une des méthodes 1 ou 2, on définit u^m par :

$$\text{(38)} \qquad Au^m = f - B^*\lambda^m$$

Q37 : i. *montrer que u^m existe pour tout m*

ii. *comment utiliser u^m dans le calcul de λ^{m+1}*

iii. *montrer que* la suite *u^m converge vers la solution u du problème $\mathcal{P}$ quand m tend vers $+\infty$.*

L'épreuve proposée cette année aux candidats comportait l'étude de méthodes numériques pour la résolution de problèmes dits, «d'optimisation convexe», c'est-à-dire pour la construction du point, s'il existe, où une fonction réelle convexe atteint sa valeur minimum sur un domaine convexe $\mathbb{R}^n$. Ce genre de problème est des plus fréquents dans les applications actuelles des mathématiques et donne lieu à un grand nombre de «programmes» (linéaires, quadratiques) qui sont de base pour la recherche opérationnelle, en général, et dans des disciplines très variées (physique, mécanique, économie, etc...). La première impression qui se dégage de la lecture des copies est que pratiquement aucun candidat n'a la moindre idée d'une telle utilisation des mathématiques. Fait très regrettable, pour de futurs professeurs qui auront à apprendre celles-ci à un plus grand nombre d'utilisateurs que de «professionnels» qui les étudieraient «en soi». Il en résulte que les candidats se contentent d'essayer de répondre le plus «scolairement» possible aux questions posées mais ne font aucun effort pour dominer le sujet dans son ensemble.

C'est dans la partie I «Préliminaires» que les candidats ont eu le plus de difficultés. Celles-ci sont dues essentiellement à une méconnaissance très grande de la convexité. La convexité d'une partie U d'un espace vectoriel n'est pas une propriété d'un couple $(x,y) \in U \times U$ par rapport à U, mais une propriété du segment $[x,y]$ par rapport à U, c'est-à-dire des éléments de forme $\lambda x + (1-\lambda)y$, $0 \leq \lambda \leq 1$.

Dans la question Q 1 il suffisait de remarquer que (1) est équivalent à : $\forall v \in U$, $\forall \lambda \in [0,1]$ $\|\omega - u\|^2 \leq \|\omega - (\lambda u + (1-\lambda)v\|^2$ pour aboutir à l'équivalence demandée.

La question Q2 a donné lieu à des réponses à peine croyables. Il faut tout d'abord faire remarquer que 7 % des candidats affirment que P est linéaire (!) et 10 % disent que (3) signifie que P est contractant(!). Nous avons sévèrement jugé de telles erreurs.

La démonstration utilisant deux fois (2) a été trouvée par moins de 40 % des candidats. Un seul candidat de l'agrégation masculine a proposé la solution «géométrique» simple qui consiste à projeter w_1 et w_2 sur la droite joignant les points Pw_1 et Pw_2.

Dans la question Q3, très peu de candidats voient qu'on peut prendre pour α la plus petite valeur propre (forcément, > 0) de la matrice A. A ce propos, comme pour les années précédentes, nous constatons une grande méconnaissance des propriétés des matrices. Suivant une tendance trop générale, il semble que seules les propriétés des «opérateurs linéaires» abstraits soient travaillées. On signale qu'en analyse numérique on est nécessairement obligé de faire intervenir des représentations matricielles de tels opérateurs et que l'on est conduit à en utiliser les propriétés numériques les plus importantes.

Les questions Q5, Q7 se traitaient encore en introduisant tous les points du segment $[u,v]$, généralisant le raisonnement de la question Q1. Pour ce qui est de la question Q6, peu de candidats reconnaissent en $Au - f$ la différentielle (en u) de l'application $u \to J_0(u)$ représentable ici par une matrice de type $(n, 1)$, c'est-à-dire un vecteur de $\mathbb{R}^n$: c'est aussi le gradient (en identifiant $\mathbb{R}^n$ à son dual) en u de cette application.

Dans la partie II, on abordait la question de la minimisation d'une forme $J_0(v)$ quadratique à matrice A symétrique définie positive sur une partie convexe et fermée U de $\mathbb{R}^n$, U n'étant pas forcément bornée ; certains candidats ont bien compris qu'il suffisait de montrer qu'on pouvait se ramener au cas où U est bornée. Ce raisonnement est d'ailleurs suggéré dans la suite (Q 11). Fort peu se sont ramenés à une projection orthogonale : ce qui est possible en introduisant R (non singulière) telle que $A = R^t.R$ (et transformant U convenablement). L'étude de l'algorithme (14) a été assez décevante : c'est encore là une preuve du manque de connaissances sur les propriétés élémentaires des matrices, de leurs normes. Peu de candidats obtiennent la meilleure valeur pour la borne $\overline{\rho}$, à cause d'une mauvaise étude de $\|I - \rho A\|$ (I identité, $\| \ \|$ norme matrice relative à la norme euclidienne de $\mathbb{R}^n$).

La question Q11 a bien troublé les candidats : tout d'abord, pour prouver que $J_1(v)$ est convexe, il semble que l'on soit allé très loin ! Bien peu aussi connaissent la définition correcte de la stricte convexité. La partie 3°) du II se rapporte au cas où $J^*(\mu)$ est une forme quadratique avec matrice seulement symétrique non négative. L'existence d'une solution est encore assurée mais par forcément par l'unicité. Les candidats ont d'ailleurs trouvé des contre-exemples (très peu intéressants parfois !). Suivaient deux méthodes destinées à construire finalement des approximations de la solution u du problème P. Les candidats ayant pu arriver à ce point du problème (10 %) ne semblent pas avoir éprouvé de grandes difficultés.

La deuxième méthode proposée pour obtenir les inégalités (27) en tenant compte des deux possibilités de valeur pour ρ^m, n'a été convenablement rédigée que par un petit nombre de candidats.

La partie III n'a pas été abordée par plus de 6 % des candidats, sans doute par manque de temps. Il s'agissait de montrer après quelques rappels d'introduction qu'un problème de «mini-max» d'un certain type peut être résolu en utilisant les méthodes d'optimisation de la partie II. Aucun des candidats n'a complètement terminé les questions qui comportaient des calculs un peu longs à cette place. Il faut cependant signaler quatre très bonnes copies qui ont obtenu des notes voisines du maximum.

Nous ne pouvons que répéter que cette épreuve d'Analyse numérique devrait être préparée en faisant, à propos des programmes d'Analyse classique, porter ses efforts sur les parties les plus constructives. Des idées générales des programmes utilisés sur les calculatrices modernes ne seraient pas non plus inutiles pour placer les candidats dans un contexte qui leur paraisse un peu moins déroutant.

Répartition des notes

HOMMES

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présents	24	84	57	33	15	11	4	2	5
Admissibles	0	6	25	24	15	11	4	2	5
Admis	0	2	10	12	11	11	3	2	5

FEMMES

	0	1 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40
Présentes	6	45	38	27	22	22	9	9	4
Admissibles	0	1	8	17	17	19	9	9	4
Admises	0	0	4	10	8	10	8	7	4