ANALYSE

Durée : 6 heures

N.B. — *Les différentes parties du problème sont indépendantes dans une large mesure.*

On désigne par P le *demi-plan de Poincaré*, c'est-à-dire l'ensemble des nombres complexes dont la partie imaginaire est strictement positive, et par D le *disque unité*, ensemble des nombres complexes de valeur absolue (ou module) strictement inférieure à 1.

Les fonctions considérées sont à valeurs complexes.

I

Le but de la première partie est de rechercher les représentations conformes de P sur lui-même.

1° *Transformation de Cayley*. Démontrer que les conditions $\mathrm{Im}(z) > 0$ et $\left|\frac{z-i}{z+i}\right| < 1$ sont équivalentes. En déduire que l'application $z \longmapsto \frac{z-i}{z+i}$ définit une représentation conforme de P sur D; déterminer l'application réciproque.

2° Quelles sont les transformations homographiques $z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$ qui conservent globalement P? Quel est l'ensemble des images d'un point donné de P par ces transformations?

En déduire, à l'aide de la question 1°, les transformations homographiques qui conservent globalement D.

3° Déterminer les transformations conformes du disque D sur lui-même qui laissent fixe l'origine (on pourra utiliser le lemme de Schwarz sur les fonctions holomorphes dans un disque).

4° Montrer qu'il n'y a pas d'autres représentations conformes de D sur lui-même ou de P sur lui-même que les transformations homographiques déterminées à la question 2°.

Démontrer que les translations réelles $z \longmapsto z + \xi$ (ξ réel), les homothéties $z \longmapsto \eta z$ ($\eta > 0$) et la transformation $z \longmapsto \frac{-1}{z}$ engendrent le groupe des représentations conformes de P sur lui-même.

II

On désigne par G le groupe des matrices carrées réelles d'ordre 2 dont le déterminant vaut 1 (groupe hyperbolique); on le fait opérer sur P par $g \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$, où g est l'élément $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G et z un élément quelconque de P. Soit $p \in \mathbf{Z}$ un entier relatif fixé dans la suite de l'étude.

Pour toute fonction φ à valeurs complexes définie dans P et pour tout élément $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de G, on désigne par φ_g la fonction :

$$z \longmapsto \varphi_g(z) = [\mathrm{Am}\,(cz+d)]^{-p}\, \varphi(g \cdot z)$$

en posant pour tout complexe z non nul $\mathrm{Am}\, z = \dfrac{z}{|z|}$.

1° Démontrer que, quels que soient les éléments g et g' de G et la fonction φ, on a :

$$(\varphi_g)_{g'} = \varphi_{gg'}$$

2° Si φ est une fonction deux fois continûment différentiable *au sens réel* (c'est-à-dire par rapport à $x = \mathrm{Re}\,(z)$ et $y = \mathrm{Im}\,(z)$) dans P, on définit l'opérateur Ω par $\Omega\varphi = y^2 \Delta\varphi - ipy \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}$, où $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ est le laplacien. Démontrer que pour tout $g \in G$ on a $\Omega\,(\varphi_g) = (\Omega\,\varphi)_g$ (on démontrera qu'il suffit de vérifier cette relation pour une famille de générateurs de G; on achèvera la démonstration en utilisant les générateurs mis en évidence dans la question I 4° ainsi éventuellement qu'une expression de Ω à l'aide de $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$).

3° Démontrer que, si φ est une fonction propre de Ω, c'est-à-dire s'il existe un nombre complexe λ tel que :

(1) $$\Omega\varphi = \lambda\varphi \qquad \varphi(z) \not\equiv 0$$

alors, pour tout élément g de G, φ_g est encore fonction propre de Ω avec la même valeur propre λ.

Déterminer, s étant un complexe fixé, les fonctions ω définies dans P qui vérifient :

$$\omega\,(az + b) = a^s\,\omega\,(z)$$

quels que soient les nombres réels a et b avec $a > 0$ et $z \in$ P ($a^s = e^{s\,\mathrm{Log}\,a}$ avec $\mathrm{Log}\,a \in \mathbf{R}$). Démontrer que pour tout complexe λ on peut trouver s de manière que ces fonctions ω vérifient l'équation (1).

III

Le but du problème est l'étude des fonctions propres φ de l'opérateur Ω qui vérifient en plus, pour tout $\xi \in \mathbf{R}$ et tout $z \in$ P, l'équation fonctionnelle :

(2) $$\varphi\,(z + \xi) = e^{i\mu\xi}\,\varphi\,(z)$$

où μ est un réel donné.

1° A une fonction φ vérifiant (2) on associe la fonction $f : y \longmapsto \varphi\,(iy)$ définie pour $y > 0$; inversement φ est déterminée par f. Montrer que, pour que φ vérifie l'équation (1), il faut et suffit que f vérifie une équation différentielle linéaire du second ordre, que l'on explicitera. Résoudre cette équation dans le cas particulier $\mu = 0$.

2° Dans le cas $\mu \neq 0$ on pose $\gamma\,(u) = f\left(\dfrac{u}{\mu}\right) = \varphi\left(\dfrac{iu}{\mu}\right)$. Écrire l'équation différentielle vérifiée par γ, et montrer qu'elle se ramène par un changement de variable adéquat à l'équation de Whittaker :

$$\zeta^2\, \mathrm{W}''\,(\zeta) = \left(\frac{\zeta^2}{4} - k\zeta + m^2 - \frac{1}{4}\right) \mathrm{W}\,(\zeta)$$

avec des valeurs de m et k que l'on calculera en fonction de p et λ.

Démontrer que, pour $p = 0$, $h\,(u) = u^{-\frac{1}{2}}\,\gamma\,(u)$ vérifie l'équation de Bessel modifiée :

$$u^2 h'' + uh' - (u^2 + n^2)\, h = 0$$

(On précisera la valeur de n).

IV

1° Pour $z \in \mathrm{P}$, on pose :

$$\omega(z) = y^s = e^{s \operatorname{Log} y} \qquad \text{(Log } y \text{ étant réel)}$$

$$\psi(z; g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_g(z+\xi)\, e^{-i\mu\xi}\, d\xi \qquad g \in \mathrm{G} \qquad \mu \in \mathbf{R}$$

Soit $g_0 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Démontrer que, pour s convenablement choisi, l'intégrale définissant $\psi(z; g_0)$ converge dans P. Montrer que $\psi(z; g_0)$ est fonction propre de Ω et satisfait (2).

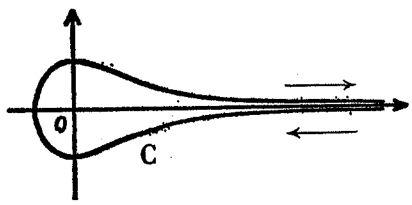
Écrire explicitement l'intégrale donnant $f_0(y) = \psi(iy; g_0)$.

2° Montrer que, si g est la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ avec $c \neq 0$, alors $\psi(z; g)$ est proportionnel à $\psi(z; g_0)$. Calculer le facteur de proportionnalité (on utilisera la décomposition $g = \sigma g_0 \tau \varepsilon$, ε désignant l'une des matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, τ et σ étant deux éléments de G associés respectivement à une translation et à une similitude conservant P).

3° Montrer que, dans le cas $\mu = 0$, $f_0(y)$ est de la forme $\mathrm{A}\, y^{1-s}$ où A est une intégrale fonction de s et de p que l'on pourra calculer en se ramenant à une intégrale eulérienne :

$$\mathrm{B}(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{-(\alpha+\beta)}\, dt$$

(On pourra faire le changement de variable d'intégration $\theta = -\dfrac{\xi + iy}{iy}$, et, en notant que dans l'intégrale obtenue on a $|\theta|^2 = -\theta(\theta+2)$, transformer le contour d'intégration d'abord en un contour de Hankel (cf. figure), puis en $]\,0, +\infty\,[$ par un passage à la limite valable moyennant certaines restrictions sur s).



4° Dans le cas général $\mu \neq 0$, expliciter l'intégrale donnant $\gamma_0(u) = f_0\left(\dfrac{u}{\mu}\right)$.

Le changement de variable $v = i\mu\xi - u$ permet de transformer cette intégrale en une intégrale sur un contour C de Hankel, comme à la question précédente. On indiquera des conditions suffisantes pour que cette transformation soit applicable et les valeurs de s pour lesquelles la nouvelle intégrale converge.

En déduire l'expression de f_0 à l'aide de la fonction de Whittaker :

$$(3)\quad \mathrm{W}_{k,m}(z) = -\frac{1}{2i\pi}\Gamma\left(k - m + \frac{1}{2}\right) e^{-\frac{z}{2}} z^k \int_{\mathrm{C}} (-v)^{m-k-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{v}{z}\right)^{m+k-\frac{1}{2}} e^{-v}\, dv$$

Pour $p = 0$, on obtient sous forme intégrale une solution de l'équation de Bessel modifiée.

5° Démontrer que, moyennant une hypothèse convenable sur s, on peut transformer l'intégrale précédente en une intégrale sur $]\,0, +\infty\,[$ comme à la question IV 3°. Expliciter l'intégrale transformée (on rappelle l'égalité $\Gamma(\alpha)\ \Gamma(1-\alpha) = \dfrac{\pi}{\sin \pi \alpha}\Big)$.

6° Démontrer que, en prenant une détermination convenable de $(1 + x)^{-\alpha}$, qui sera précisée, et α non entier négatif, on a :

$$(1+x)^{-\alpha} = \frac{1}{2 i \pi} \int_{\Delta} \frac{\Gamma(-u+\alpha)\,\Gamma(u)}{\Gamma(\alpha)} x^{-u}\, du$$

pour $|\arg x| < \pi$ et pour un contour convenable Δ allant de $-\infty i$ à $+\infty i$ (on pourra utiliser un calcul de résidus ou la formule d'inversion de l'intégrale de Fourier, et la formule asymptotique :

$$\Gamma(z+a) \sim \sqrt{2\pi}\, \exp\left[\left(z+a-\frac{1}{2}\right) \operatorname{Log} z - z\right]$$

pour $|z| \to \infty$, $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$ avec $\delta > 0$).

7° Démontrer, à l'aide de la question précédente, que :

$$\text{(4)}\quad W_{k,-s+\frac{1}{2}}(z) = \frac{1}{2 i \pi} e^{-\frac{z}{2}} z^k \int_{\Delta} \frac{\Gamma(s-k-u)\,\Gamma(1-s-k-u)\,\Gamma(u)}{\Gamma(s-k)\,\Gamma(1-s-k)} z^u\, du$$

pour $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$, si $s-k$ et $1-s-k$ ne sont ni l'un ni l'autre des entiers négatifs. En déduire que $W_{k,-s+\frac{1}{2}} = W_{k,s-\frac{1}{2}}$.

8° Démontrer à l'aide de la formule (3) ou de la formule (4) que $W_{k,m}$ admet un développement asymptotique de la forme

$$e^{-\frac{z}{2}} z^k \left(1 + \frac{\alpha_1}{z} + \ldots\ldots\ldots + \frac{\alpha_n}{z^n} + r_n\right)$$

où r_n est dominé par $\dfrac{1}{|z|^{n+1}}$ lorsque $|z| \longrightarrow \infty$, $|\arg z| < \dfrac{3\pi}{2}$.

9° Démontrer que les fonctions $z \longmapsto W_{k,m}(z)$ et $z \longmapsto W_{-k,m}(-z)$ sont des solutions indépendantes de l'équation de Whittaker. En déduire la solution générale du système des deux équations (1) et (2), ainsi que les solutions de ce système qui sont dominées par une puissance de y lorsque $y \longrightarrow +\infty$.

Le but du problème était de faire apparaître le lien entre la théorie de certaines fonctions spéciales et la théorie des groupes : on y étudie les fonctions de Whittaker à partir du groupe hyperbolique G opérant dans le demi-plan de Poincaré. La première partie est pratiquement une question de cours : détermination d automorphismes analytiques complexes du demi-plan de Poincaré. Les parties II et III préparent à l'étude projetée en définissant l'opérateur linéaire du second ordre Ω invariant par les opérations de G sur les fonc tions dans le demi-plan de Poincaré et en montrant comment s'introduisent les fonctions de Whittaker (et le fonctions de Bessel qui en sont un cas particulier). L'étude proprement dite occupe la quatrième partie ; tr peu de candidats malheureusement ont abordé cette partie et presque tous se sont noyés dans les difficulté de calcul du début. Faut-il rappeler à cette occasion que, pour faire des mathématiques, il est encore indis sable de savoir calculer !

Voici quelques remarques sur les différentes questions et les erreurs les plus fréquemment relevées

Partie I

1° - La question est très facile, pourtant quelques candidats y trouvent prétexte à remplir deux pag de calculs compliqués. Plusieurs ignorent apparemment le sens de «conforme» et l'interprètent comme synonyme de «bijectif».

2° - La difficulté consistait sans doute à montrer que a, b, c, d doivent être proportionnels à des nombres réels (par exemple en observant que la transformation conserve l'axe réel). La plupart des candida se sont limités à l'étude des homographies à coefficients réels. Ceux qui sont partis des homographies à coefficients complexes ont souvent commis dans leurs démonstrations l'erreur qui consiste à caractériser la transformation T, décomposée en un point $T_2 \circ T_1$ et conservant une partie E, en cherchant les conditi pour que chacune des transformations T_1 et T_2 conservent E ; les conditions ainsi obtenues sont seulemen suffisantes. Il semble aussi que l'on répugne à utiliser les interprétations géométriques des opérations sur $\mathbb{C}$ malgré l'aide que l'on peut quelquefois y trouver pour écourter un calcul pénible.

3° - Presque personne ne connaissait l'énoncé correct du lemme de Schwarz. Une erreur fréquente c consisté à écrire : s'il existe $z_0 \in$D tel que $|f(z_0)| = |z_0|$ alors $f(z)$ est proportionnel à z ; comme or $f(0) = 0$ on peut prendre $z_0 = 0$! En fait il fallait appliquer le lemme de Schwarz à f et à sa réciproque f^{-1}.

Partie II

1° - En toute rigueur il fallait d'abord vérifier que G opère vraiment sur P, c'est-à-dire que $g(g'z) = (gg')z$ pour $g, g' \in$ G et $z \in$P. Cette vérification a souvent été oubliée.

2° - Le plus simple, pour se ramener aux générateurs du groupe, consistait à observer que l'ensemb des éléments g tels que $\Omega(\varphi g) = (\Omega\varphi)_g$ est un sous-groupe de G en vertu de la question précédente. Quelqu candidats ont écrit un élément générique de G comme combinaison linéaire des générateurs. Ecrire g sous forme d'un produit de générateurs nécessitait, en toute rigueur, un raisonnement par récurrence.

Le cas des translations et des homothéties est trivial. Signalons pourtant qu'il fallait utiliser pour l homothéties la matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{\eta} & 0 \\ 0 & -\sqrt{\eta} \end{pmatrix}$ et se garder de dire qu'on a nécessairement $\eta = 1$ comme plusieurs cand l'ont fait. Tous ont oublié le cas : $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Le cas du générateur $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est la première véritable difficulté, car le calcul est assez compliqu Cette difficulté n'a presque jamais été surmontée, faute de savoir calculer correctement les dérivées partie Ce calcul a révélé des lacunes graves dans le maniement des opérateurs $\dfrac{\partial}{\partial z}$ et $\dfrac{\partial}{\partial z'}$; on trouve pa exemple l'erreur suivante : $\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}} \varphi\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{1}{z}\right) \cdot \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\dfrac{1}{z}\right) = 0$!

Notons enfin que de nombreux candidats se sont contentés de trouver la solution particulière y^s de l'équation fonctionnelle $\omega(az+b) = a^s\,\omega(z)$ et n'ont pas su montrer que les autres lui sont proportionnelles.

Partie III

1° - La résolution de l'équation différentielle $y^2 f'' = \lambda f$ a arrêté un certain nombre de candidats. Signalons que c'est un cas très particulier des équations du type de Fuchs qui sont au programme ; le cas $d = -\frac{1}{4}$ a été oublié la plupart du temps.

2° - Comme f est seulement définie pour $y > 0$, il faut distinguer les cas $\mu > 0$ et $\mu < 0$.

Partie IV

Certains candidats se sont crus obligés de traîner l'écriture $e^{s\,Log\,y}$ pour y^s tout au long des calculs, ce qui devient vite intenable. L'étude de la convergence de l'intégrale repose sur une majoration de la fonction à intégrer et en définitive sur la formule $\left|\,|z+\xi|^{2s}\right| = |z+\xi|^{2\,Re(s)}$. Lisant trop rapidement l'énoncé, bon nombre de candidats ont considéré s comme réel. D'autres arrivant à la condition $Re(s) > 0$ s'imaginent qu'une intégrale converge dès que la fonction sous le signe $\int$ tend vers 0 à l'infini.

Pour montrer que $\psi(z\,;g_0)$ est fonction propre de Ω on se ramène à $\omega_g(z)$ en dérivant sous le signe $\int$; il faut bien sûr justifier correctement cette opération. Pour ω_g le résultat est une conséquence évidente de II 2° et II 3°.

2° - La décomposition $g = \sigma\, g_0\, \tau\epsilon$ est en fait la même que dans I 4° ; le signe de ϵ est celui de c. Il faut observer que la translation τ s'élimine par un changement de la variable d'intégration (en faisant apparaître un facteur $e^{i\mu d/c}$) tandis que la similitude s'élimine à cause de la propriété de ω vue en II 3° (facteur $1/|c|^{2s}$).

3° - Pour calculer A par le changement de variable indiqué, il faut d'abord être capable de trouver le contour d'intégration décrit par la variable θ ; beaucoup ont fait comme si θ variait de $-\infty$ à $+\infty$ sur l'axe réel, alors qu'il décrit une droite parallèle à l'axe imaginaire. La justification des transformations de contour suggérées par l'énoncé repose sur des calculs de majoration habituels dans le calcul des résidus.

4° et 5° - La méthode est entièrement parallèle à celle de la question précédente. Le plus grand soin doit être apporté au choix des arguments de $-v$ et $(1+\frac{v}{z})$.

La suite du problème n'a pratiquement pas été abordée. A la sixième question on doit faire attention à placer correctement le contour Δ par rapport aux pôles $\Gamma(u)$ (c'est-à-dire les entiers négatifs) et aux pôles de $\Gamma(-u+\alpha)$ de la forme $(\alpha+n,\ n\in N)$. De même à la septième question Δ doit laisser d'un côté les entiers négatifs et de l'autre les points $s-k+n$ et $1-s-k+n$ $(n\in N)$. Pour obtenir l'intégrale (4) à partir de la formule de la sixième question et de l'intégrale obtenue dans la question 5° il faut justifier l'interversion de l'ordre des intégrations.

Pour la huitième question la formule (4) donne directement le développement asymptotique avec l'expression des coefficients α_i par un calcul de résidus analogue à celui de la sixième question. Si on part de (3) c'est un peu plus difficile et on n'obtient pas tout de suite le domaine de validité $(|arg\,z| < 3\pi/2)$.

A la neuvième question l'interdépendance des deux solutions se lit sur leurs parties principales pour $|z| \longrightarrow +\infty$.

Répartition des notes

Le problème certainement est long. Mais chacune des trois premières parties comporte des questions très faciles ; cela explique sans doute que les notes soient plutôt meilleures que celles du concours précédent.

HOMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présents	97 x	85	117	134	118	84	55	38	20	12	10	10
Admissibles	0	1	3	23	46	58	45	38	20	12	10	10
Admis	0	0	2	6	16	25	19	29	18	12	9	10

x dont quatorze 0.

FEMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présentes	42 xx	36	80	97	107	59	33	16	9	2	2	1
Admissibles	0	0	1	22	53	50	32	16	9	2	2	1
Admises	0	0	0	11	17	26	21	14	9	2	2	1

xx dont un 0

COMPOSITION D'ANALYSE NUMÉRIQUE

N. B. — *Il sera tenu le plus grand compte de la présentation et de la rédaction des copies; en particulier les abréviations abusives risquent de n'être pas comprises. Les candidats sont priés de respecter les notations de l'énoncé. Les questions posées aux candidats sont désignées dans le texte par les symboles* (Q_i) $(i = 1, 2, ..., 37)$ *qui se détachent dans la marge.*

Tous les scalaires du problème sont réels.

Notations. — Les éléments $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathrm{R}^n$ sont identifiés à des matrices colonnes à n lignes; on pose pour $u,v \in \mathrm{R}^n$

$$(u\,,v)_n = \sum_{i=1}^{n} u_i . v_i$$

$$\|\, u \,\|_n = (u\,,u)_n^{1/2}$$

$$\{\{\, u \,\}\}_n = \sum_{i=1}^{n} |\, u_i \,|$$

I. PRÉLIMINAIRES

1° Soit U un sous-ensemble convexe, fermé de R^n. On désigne par P l'opérateur projection de R^n sur U; Pw est le point de U réalisant le minimum de la distance de w à U.

Q1 : Montrer que les relations (1) *et* (2) *sont équivalentes :*

(1) $u = \mathrm{P}w.$

(2) $\begin{cases} u \in U \\ (w - u,\, v - u)_n \leqslant 0 \qquad \forall v \in U. \end{cases}$

Q2 : Montrer que P *vérifie :*

(3) $\|\, \mathrm{P}w_1 - \mathrm{P}w_2 \,\|_n \leqslant \|\, w_1 - w_2 \,\|_n \qquad \forall\, w_1,w_2 \in \mathrm{R}^n.$