EPREUVES ECRITES

COMPOSITION DE MATHÉMATIQUES GÉNÉRALES

DURÉE : 6 heures

L'objet du problème est l'étude de certains sous-groupes du groupe PGL(2,**C**) des homographies du *plan projectif* $P_2(\mathbf{C})$ sur le corps **C** des nombres complexes. Pour toute partie E de $P_2(\mathbf{C})$, on notera $\mathcal{H}(E)$ le sous-groupe de PGL(2,**C**) formé des homographies h laissant E globalement invariante, c'est-à-dire telles que l'on ait $h(E) = E$. Dans certaines questions, on utilisera la *droite projective complexe* $P_1(\mathbf{C})$.

Rappels. Une n-forme en trois indéterminées X,Y,T est un polynôme homogène F de $\mathbf{C}[X,Y,T]$ de degré $n \geqslant 1$. Un repère projectif de $P_2(\mathbf{C})$ étant choisi, l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des points M de $P_2(\mathbf{C})$ dont les coordonnées X,Y,T vérifient $F(X,Y,T) = 0$ est la *courbe algébrique attachée à* F; les éléments de $\mathcal{C}(F)$ sont les *points* de la forme; ainsi à une 1-forme est attachée une *droite*, à une 2-forme une *conique propre* ou la *réunion de deux droites*... Les courbes attachées à deux 2-formes F_1 et F_2 sont égales si, et seulement si, F_1 et F_2 sont proportionnelles.

Soit M_0 (X_0,Y_0,T_0) un point de $\mathcal{C}$ (F)et M_1 (X_1,Y_1,T_1) un point de $P_2(\mathbf{C})$ $(M_1 \neq M_0)$; en M_0 la droite de représentation $M = M_0 + \rho M_1$ rencontre $\mathcal{C}(F)$ à l'ordre k (ou : k fois) pour la forme F, si la valuation du polynôme $F(X_0 + \rho X_1, Y_0 + \rho Y_1, T_0 + \rho T_1)$ par rapport à ρ est égale à k $\left(\text{par convention la valuation du polynôme nul est } + \infty\right)$. La droite $M = M_0 + \rho M_1$ est *tangente en* M_0 à $\mathcal{C}(F)$ si k est supérieur ou égal à 2 et s'il existe une droite rencontrant en M_0 la courbe $\mathcal{C}(F)$ à un ordre $l \leqslant k - 1$ $(1 \leqslant l < +\infty)$. *L'ordre* du point M_0 pour la forme F est le minimum de cette valuation quand M_1 varie; M_0 est *singulier* si son ordre est supérieur ou égal à 2 $\left(\text{pour cela, il faut et il suffit que l'on ait } F'_X(M_0) = F'_Y(M_0) = F'_T(M_0) = 0\right)$. Dans le cas contraire M_0 est *simple*.

Enfin on admettra que, si les deux n-formes F_1 et F_2 sont *irréductibles*, la relation $\mathcal{C}(F_1) = \mathcal{C}(F_2)$ équivaut à l'existence d'un complexe t non nul tel que l'on ait : $F_1 = t F_2$. Il s'ensuit que, pour toute courbe algébrique $\Gamma = \mathcal{C}(F)$ attachée à une forme irréductible F et pour toute homographie $h \in \mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})$, on a : $h(\Gamma) = \Gamma$ si, et seulement si, il existe un complexe t non nul tel que l'on ait $F(X',Y',T') = t\,F(X,Y,T)$, où X,Y,T désignent les coordonnées d'un point M quelconque de $P_2(\mathbf{C})$ et (X′,Y′,T′) celles de $M' = h(M)$.

On appelle *triangle* un ensemble de trois points non alignés de $P_2(\mathbf{C})$, et *côtés* de ce triangle les trois droites joignant deux à deux les trois points. On appelle *quadrangle* un ensemble de quatre points de $P_2(\mathbf{C})$ dont trois quelconques ne sont pas alignés, et *côtés* de ce quadrangle les six droites joignant deux à deux les quatre points; ces côtés se coupent deux à deux en sept points dont trois n'appartiennent pas au quadrangle et forment son *triangle diagonal.*

Dans toute la partie I on désigne par Q un quadrangle ABCD donné.

On conviendra de réserver l'appellation *conique* aux coniques *propres* et aux réunions de deux droites distinctes.

1° Montrer que le groupe $\mathcal{H}(Q)$ est isomorphe au groupe des permutations de Q. Dans la suite, on notera $\mathcal{A}(Q)$ le sous-groupe de $\mathcal{H}(Q)$ formé des homographies correspondant aux permutations paires de Q.

2° Dans $P_2(\mathbf{C})$ on choisit le repère $\mathcal{R}$ tel que Q soit l'ensemble des points $A(1,1,1)$, $B(-1,1,1)$, $C(-1,-1,1)$, $D(1,-1,1)$. On désigne par Φ le faisceau linéaire ponctuel des coniques attachées aux formes $\lambda_1(X^2 - T^2) + \lambda_2(T^2 - Y^2)$, où λ_1 et λ_2 sont deux complexes non simultanément nuls.

a. Démontrer qu'on peut définir une bijection θ de Φ sur $P_1(\mathbf{C})$ telle que la conique d'équation $\lambda_1(X^2 - Y^2) + \lambda_2(T^2 - Y^2) = 0$ corresponde, dans un repère convenable de $P_1(\mathbf{C})$, au point de coordonnées homogènes (λ_1,λ_2). Dans la suite on identifie Φ et $P_1(\mathbf{C})$ à l'aide de θ.

b. Pour toute conique K de Φ et pour toute homographie h de $\mathcal{H}(Q)$, la transformée $h(K)$ est une conique de Φ. Démontrer que, pour h fixée, l'application $\breve{h} : K \longmapsto h(K)$ est une homographie de $P_1(\mathbf{C})$.

L'application $h \longmapsto \breve{h}$ est un homomorphisme de $\mathcal{H}(Q)$ dans le groupe $PGL(1,\mathbf{C})$ des homographies de $P_1(\mathbf{C})$; en déterminer avec précision l'image I_Q et le noyau (en appelant abscisse projective de N (λ_1,λ_2) le birapport $\rho = (\lambda_1,\lambda_2,0,\infty)$, on pourra définir toute homographie de $P_1(\mathbf{C})$ en exprimant en fonction de ρ l'abscisse projective ρ' de l'image N' de N).

c. Quels sont les points doubles des homographies éléments de I_Q? Montrer que les orbites des éléments de Φ sous $\mathcal{H}(Q)$ ont en général six éléments, que deux d'entre elles ont trois éléments, et que l'une d'entre elles a deux éléments. Représenter sur une même figure les orbites à trois éléments.

3° *a.* Démontrer que $\mathcal{H}(Q)$ est engendré par les homographies σ et τ correspondant aux permutations $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$. Représenter σ et τ par des matrices relativement au repère $\mathcal{R}$.

Démontrer que $\mathcal{A}(Q)$ est engendré par les homographies φ et ψ correspondant aux permutations $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & A & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & A & D & C \end{pmatrix}$. Représenter φ et ψ par des matrices relativement à $\mathcal{R}$.

b. Montrer qu'il existe dans $P_2(\mathbf{C})$ une conique et une seule K(Q) laissée globalement invariante par toute homographie de $\mathcal{H}(Q)$. Quelles sont les polaires de A,B,C,D par rapport à K(Q)?

c. On se donne un ensemble Q* de quatre droites de $P_2(\mathbf{C})$, dont trois quelconques ne sont pas concourantes. Déterminer le groupe des homographies qui laissent Q* globalement invariant.

4° Le repère étant toujours $\mathcal{R}$, on s'intéresse ici à des courbes algébriques soit invariantes par toute homographie du groupe $\mathcal{H}(Q)$ (en abrégé par $\mathcal{H}(Q)$), soit invariantes par toute homographie du groupe $\mathcal{A}(Q)$ (par $\mathcal{A}(Q)$).

a. Établir qu'une courbe attachée à une 4-forme $H(X,Y,T)$ est invariante par $\mathcal{H}(Q)$ si, et seulement si, on a :

$$H(X,Y,T) = S(X^2,Y^2,T^2) \text{ où S est une 2-forme symétrique.}$$

b. Trouver les 4-formes dont les courbes attachées sont invariantes par $\mathcal{A}(Q)$.

II

On conserve toutes les notations précédentes; $P_2(\mathbf{C})$ est rapporté à $\mathcal{R}$. Pour tout $\lambda \in \mathbf{C}$, on désigne par F_λ la 4-forme :

$$X^4 + Y^4 + T^4 + 2\lambda(Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2)$$

et par C_λ la courbe algébrique $\mathscr{C}(F_\lambda)$. On note F_∞ la forme :

$$Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2$$

et C_∞ la courbe $\mathscr{C}(F_\infty)$; F_∞ *et* C_∞ *n'interviennent que dans les questions* 1º*a et* 6º. Une 4-forme F_λ (ou F_∞) et une droite L étant données, on dit que L est *tangente double* à la courbe C_λ attachée (ou C_∞) si L la rencontre soit aux ordres 2 et 2 en deux points simples distincts, soit à l'ordre 4 en un point simple. Une telle tangente double est dite *ordinaire* dans le premier cas, *stationnaire* dans le deuxième. On se propose dans cette partie de déterminer les tangentes doubles à certaines courbes C_λ.

1º *a*. Établir que F_∞ est irréductible et préciser ses points singuliers. Trouver une représentation paramétrique rationnelle propre de C_∞.

b. Vérifier que C_{-1} est la réunion de quatre droites. Pour quelles autres valeurs λ complexes la forme F_λ a-t-elle des points singuliers? Démontrer que pour ces valeurs F_λ n'est pas irréductible dans $\mathbb{C}[X,Y,T]$. Préciser les courbes C_λ correspondantes. On note Λ l'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles F_λ est irréductible; *dans la suite, sauf au* 6º, *on impose à* λ *d'appartenir à* Λ.

c. Établir que, pour $\lambda \in \Lambda$, les courbes C_λ admettent comme tangentes doubles fixes ordinaires les quatre droites de C_{-1} et que les points de contact ne dépendent pas de λ.

2º Déterminer les tangentes doubles à C_λ qui passent par les trois points :

(1) $\qquad (0,0,1) \qquad (0,1,0) \qquad (1,0,0)$

Sont-elles ordinaires ou stationnaires?

3º On désigne par g l'application de $P_2(\mathbb{C})$ dans lui-même qui à tout point $M(X,Y,T)$ fait correspondre le point $g(M)$ de coordonnées (X^2,Y^2,T^2).

a. Démontrer que, si Γ est une courbe algébrique, $g^{-1}(\Gamma)$ est une courbe algébrique. Quelle est l'image par g d'une courbe C_λ?

b. On désigne par $\mathscr{T}$ la famille des coniques propres de $P_2(\mathbb{C})$ tangentes aux trois droites d'équations $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$. Démontrer que, si L est une droite de $P_2(\mathbb{C})$, g applique en général L sur une conique de la famille $\mathscr{T}$. Quels sont les cas d'exception? Quelle est l'image réciproque $g^{-1}(g(L))$?

c. Soit $F(X,Y,T)$ et $G(X,Y,T)$ deux formes de degrés quelconques, Γ et Δ les courbes attachées à ces formes. On désigne par Γ' et Δ' les courbes attachées aux formes $F(X^2,Y^2,T^2)$ et $G(X^2,Y^2,T^2)$, par $M_0(X_0,Y_0,T_0)$ un point de $\Gamma' \cap \Delta'$, et par N_0 le point $g(M_0)$; on suppose que M_0 n'appartient à aucune des trois droites $X = 0$, $Y = 0$, $T = 0$. Démontrer que Γ' et Δ' ont en M_0 une tangente commune au moins si, et seulement si, Γ et Δ ont en N_0 une tangente commune au moins. (On pourra traiter d'abord le cas : $X_0 = Y_0 = T_0$.)

4º *a*. On considère une tangente double L à C_λ ne passant par aucun des trois points définis au II-2º par (1). Démontrer que la conique propre $g(L)$ est soit bitangente, soit surosculatrice à la conique Γ_λ attachée à la forme $X^2 + Y^2 + T^2 + 2\lambda(YT + TX + XY)$. Quelles sont les images par g des tangentes doubles trouvées au II-2º?

b. Trouver, λ étant fixé dans Λ, les coniques de la famille $\mathscr{T}$ qui sont bitangentes ou surosculatrices à Γ_λ. On pourra utiliser la propriété suivante : deux coniques propres, définies en coordonnées ponctuelles ou tangentielles par des matrices symétriques U et V, relatives à un repère projectif donné, sont bitangentes ou surosculatrices si, et seulement si, il existe des complexes ξ et η tels que la matrice $\xi U + \eta V$ soit de rang 1.

c. Déduire de ce qui précède que les tangentes doubles à C_λ, autres que celles déjà trouvées au II-1° et au II-2°, sont les douze droites dont les équations $\alpha X + \beta Y + \gamma T = 0$ ont leurs coefficients α, β, γ assujettis à vérifier l'un des systèmes (2), (3), (4) suivants :

$$(2) \begin{cases} \alpha^2 = -(2\lambda + 1) \\ \beta^2 = \gamma^2 = 1 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} \beta^2 = -(2\lambda + 1) \\ \gamma^2 = \alpha^2 = 1 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} \gamma^2 = -(2\lambda + 1) \\ \alpha^2 = \beta^2 = 1 \end{cases}$$

Montrer que pour $\lambda \neq \frac{3}{2}$ ces tangentes doubles sont toutes ordinaires. Étudier le cas $\lambda = \frac{3}{2}$.

d. Utiliser les résultats précédents pour représenter relativement à un système d'axes rectangulaires $x'Ox$, $y'Oy$ (unité 2 cm) la courbe d'équation $x^4 + y^4 - 4x^2y^2 - 4(x^2 + y^2) + 1 = 0$; tracer ses tangentes doubles.

5° Il résulte de I-4° qu'on a : $\mathcal{H}(Q) \subset \mathcal{H}(C_\lambda)$.

a. Par chacun des neuf points suivants :

$$(5) \quad \begin{cases} (1,0,0) \quad (0,1,0) \quad (0,0,1) \quad (1,1,0) \quad (1,-1,0) \\ (1,0,1) \quad (0,1,1) \quad (-1,0,1) \quad (0,-1,1) \end{cases}$$

passent quatre tangentes doubles à C_λ. Démontrer que :

$$\text{pour } \lambda' = -\frac{3}{4}(1 + i\sqrt{7}) \quad \text{et} \quad \lambda'' = -\frac{3}{4}(1 - i\sqrt{7})$$

il existe d'autres points par lesquels on peut mener quatre tangentes doubles à C_λ (on pourra en chercher sur la droite $X - Y = 0$).

b. On pourra admettre que, pour $\lambda \in \Lambda - \{\lambda', \lambda''\}$, les neuf points (5) sont les seuls par lesquels il passe quatre tangentes doubles à C_λ. En déduire qu'on a alors : $\mathcal{H}(C_\lambda) = \mathcal{H}(Q)$.

Prouver que, si λ et μ sont deux éléments distincts de $\Lambda - \{\lambda', \lambda''\}$, il n'existe pas d'homographie h appartenant à PGL(2,C) telle qu'on ait :

$$h(C_\lambda) = C_\mu$$

6° Examiner ce que devient l'ensemble des tangentes doubles pour C_∞, et montrer qu'on a encore $\mathcal{H}(C_\infty) = \mathcal{H}(Q)$.

N. B. — On ne cherchera pas à étudier les groupes $\mathcal{H}(C_{\lambda'})$ et $\mathcal{H}(C_{\lambda''})$.

Trop de candidats n'ont sur les espaces projectifs et les transformations homographiques que des connaissances extrèmement vagues ; le nombre élevé de copies blanches ou nulles sur cette partie du pro - un gros tiers de l'effectif des présents obtient au plus 5 sur 60 - incite à penser que beaucoup d'entre eu ont délibérément laissé de côté ces questions au cours de la préparation. De façon plus générale d'ailleu l'épreuve de Mathématiques générales et les épreuves orales montrent que la géométrie est négligée trop sc pendant les révisions traditionnelles et aussi probablement pendant les études supérieures en Faculté. Si ler les erreurs et les non-sens les plus grossiers est peut-être la meilleure façon d'inciter les futurs cand à réfléchir sur les méfaits d'une préparation incomplète et sur la nécessité de posséder une bonne maîtris toutes les techniques de base ; ces fautes sont en quelque sorte authentifiées par ces phrases entre guille relevées sur certaines copies et ... retrouvées sur bien d'autres sous une forme voisine.

Partie I

- «Le groupe P.GL $(2, \mathbb{C})$ est le groupe circulaire» caractérise une confusion trop fréquente entre le plan (Cauchy et le plan projectif complexe, entre transformations circulaires et transformations homographique
- «Distinguons plusieurs cas : a) les côtés de Q se rencontrent ; b) ces côtés sont parallèles». On ne sait toujours qu'il est absurde de parler dans le plan projectif de droites parallèles tout autant que d'y sépar ellipses, hyperboles, paraboles.
- «L'espace vectoriel $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ dont le plan projectif $P_2(\mathbb{C})$ est issu» (très fréquent).
- «Une homographie $h \in$ PGL$(2, \mathbb{C})$ a trois points fixes non alignés ou une droite de points fixes seuleme
- « $(0,0,0)$ est un point $P_2(\mathbb{C})$» (très fréquent !).
- «Une homographie plane est délimitée par trois points».
- «Par quatre points du plan passe une conique et une seule».
- «$\tilde{h}$ est une homographie car la transmuée d'une application par une bijection est une application de mêm nature».
- «Le déterminant d'une homographie de A(Q) doit être positif, car cette homographie induit sur Q une pe tation paire».
- «Q^* étant dual de Q, le groupe $H(Q^*)$ est le groupe dual de H(Q)». (Pour certains candidats un quadrila Q^* définit un seul quadrangle Q).
- Dans plusieurs dizaines de copies, les matrices des homographies de $P_2(\mathbb{C})$ sont carrées d'ordre deux quatre. Trop de candidats n'ont d'ailleurs pas songé que les coordonnées de chaque point ne sont défin qu'à un facteur non nul près; il en est résulté soit des matrices fausses (rendons hommage à ceux qui l' vu et l'ont dit) soit des matrices exactes sans doute, mais par chance.
- Au 1 2°, un diagramme d'applications est insuffisant pour établir que $\tilde{h}$ est une homographie. La relatic $\tilde{h} = \theta . h . \theta^{-1}$ est incorrecte car h est définie sur $P_2(\mathbb{C})$ sur Φ. La relation entre le cardinal I_Q et le cardinal du noyau de l'homomorphisme $h \longrightarrow \tilde{h}$ est très rarement utilisée, parfois même contredite.
- Au 1 3° a), une énumération n'est une démonstration (combien maladroite !) que si elle est complète, G de temps perdu par telle candidate qui, pour résoudre cette question a écrit sur la copie quatre-vingts permutations !
- Une permutation de l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est une bijection de cet ensemble sur lui-même. Les jur ont accepté les produits de permutations «de gauche à droite» ou de «droite à gauche», ainsi que l'inte prétation des permutations comme des opérations sur le rang des éléments.
- A la fin du I, les confusions entre courbe invariante et forme invariante sont fréquentes. Au I 4°, il est indispensable de distinguer le cas des formes réductibles de celui des formes irréductibles.

Partie II

- Le calcul des points singuliers de F_∞ est rarement effectué correctement. Trop de candidats croient découvrir que «(0,0,0) est point singulier de chaque F_λ». Il a été constaté une absence fréquente de méthode et de rigueur dans la discussion de systèmes d'équations (par exemple pour traduire la proportionnalité des formes ou pour chercher les points singuliers des C_λ) ; en particulier l'équivalence entre la question posée et le système utilisé n'est pas toujours justifiée.

- Les tentatives pour établir l'irréductibilité de F_∞ partent trop souvent d'affirmations non justifiées (symétrie des facteurs, produit de deux polynômes du second degré,...) et sont mal conduites, sans aboutissement valable. Finalement au concours féminin, cette irréductibilité a été établie correctement dans trois copies ; dans les autres on relève des phrases du genre «F_∞ est irréductible car sa seule racine est (0,0,0)» ou «F_∞ est divisible par $X + Y - T$» ou «les facteurs irréductibles d'un polynôme symétrique sont symétriques»...

- Le nombre des candidats qui arrivent à donner une représentation rationnelle de C_∞ est finalement très limité. Nombreux sont ceux qui affirment donner une telle représentation avec des formules du genre : «$x = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ ...»; la seule façon connue de paramétrer une quartique semble être de couper par des droites passant par un point singulier -(mais «il faudrait un point d'ordre 3» remarque une candidate).

- La décomposition de $C_{-\frac{1}{2}}$ est rarement obtenue ; elle se déduit pourtant immédiatement de l'identité :

$$a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = (a + jb + j^2c)(a + j^2b + jc)$$

- Dans le II, 2° la recherche des tangentes doubles à C_λ passant par les points (0,0,1), (0,1,0) et (1,0,0) ne présente aucune difficulté même technique ; il suffit de considérer le seul point (0,0,1) et de couper C_λ par la droite d'équation $Y = mX$.

- Au II, 3° les confusions entre g et g^{-1} sont fréquentes. Dans 20 % des copies d'un correcteur «l'image par g de la quartique d'équation

$$X^4 + Y^4 + T^4 + 2\lambda(Y^2T^2 + T^2X^2 + X^2Y^2) = 0$$ est la courbe de degré 8 définie par

$$X^8 + Y^8 + T^8 + 2\lambda(Y^4T^4 + T^4X^4 + X^4Y^4) = 0$$ » [Rappelons que par g le point (X, Y, T) a pour image le point (X^2, Y^2, T^2).]

- Au II, 3° b) on oublie de montrer que g applique L <u>sur</u> une conique <u>propre</u> .

Les questions II 3° c) et II 4° ont été heureusement abordées dans quelques très bonnes copies.

Répartition des notes

HOMMES

	$0 \leqslant n \leqslant 5$	$5 < n \leqslant 10$	$10 < n \leqslant 15$	$15 < n \leqslant 20$	$20 < n \leqslant 25$	$25 < n \leqslant 30$	$30 < n \leqslant 35$	$35 < n \leqslant 40$	$40 < n \leqslant 45$	$45 < n < 50$	$50 < n < 55$	$55 < n \leqslant 60$
Présents	299	152	120	102	56	42	17	8	15	13	6	5
Admissibles	3	7	35	67	51	40	17	8	14	13	6	5
Admis	0	0	11	24	27	28	14	7	11	13	6	5

FEMMES

	0 à 5	6 à 10	11 à 15	16 à 20	21 à 25	26 à 30	31 à 35	36 à 40	41 à 45	46 à 50	51 à 55	56 à 60
Présentes	170	115	78	73	32	17	16	12	5	1	4	2
Admissibles	0	18	32	53	30	16	15	12	5	1	4	2
Admises	0	6	12	22	17	9	13	12	5	1	4	2