Version: French

Premier Jour

Olympiades d'Iran - 5 mai 1999

1. Existe-t-il un entier qui soit une puissance de 2 et tel que l'on puisse obtenir une autre puissance de 2 par une permutation de ses chiffres décimaux ?

2. Soit ABC un triangle dont les angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ mesurent plus de 45 degrés. On construit les triangles isocèle-rectangles CAM et BAN l'extérieur du triangle ABC de telle sorte que les angles droits sont $\widehat{CAM}$ et $\widehat{BAN}$. On construit également le triangle isocèle-rectangle BPC l'intérieur de ABC de telle sorte que son angle droit est $\widehat{BPC}$. Montrer que le triangle MNP est également isocèle-rectangle.

3. On a un réseau 100×100 avec un arbre planté sur chacun des 10000 points. Combien peut-on couper d'arbres au maximum de telle manière que de chaque endroit où un arbre a été coupé, on ne puisse constater la coupe d'aucun autre arbre. (En d'autres termes, toute ligne joignant deux sites où les arbres ont été coupés doit contenir au moins un arbre.)

Temps accordé: 4 heures.

Version: French

Deuxième Jour

Olympiades d'Iran - 6 mai 1999

4. Trouver tous les entiers naturels m pouvant s'écrire:

$$m = \frac{1}{a_1} + \frac{2}{a_2} + \ldots + \frac{1378}{a_{1378}}$$

où $a_1, \ldots a_{1378}$ sont des entiers naturels.

5. Soit un triangle ABC; P, Q, R trois points situés respectivement sur les côtés AB, AC et BC. A', B', C' trois points situés respectivement sur les droites $(PQ), (PR)$ et (QR) de telle sorte que $(AB) \parallel (A'B')$, $(AC) \parallel (A'C')$ et $(BC) \parallel (B'C')$. Montrer que

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{\textbf{aire}(ABC)}{\textbf{aire}(PQR)}.$$

6. $A_1, A_2, \ldots A_n$ sont n points distincts du plan. On colorie en rouge le milieu de chaque segment A_iA_j, $i \neq j$. Trouver le nombre minimum de points rouges.

Temps accordé: 4 heures.