Concours Général 2002

Dans tout le problème, un triangle ABC est la figure déterminée par les trois points A, B, C supposés non alignés. Conformément à la tradition, les longueurs de ses côtés seront notées $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$, et $\hat{A}$, $\hat{B}$ et $\hat{C}$ sont les mesures en radians, comprises entre 0 et π, de ses angles.

Les trois premières parties se déroulent dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ associé aux coordonnées (x, y) (ou (X, Y)).

Première Partie

Soit ABC un triangle. On note P le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et D le symétrique du point C par rapport à la droite (AP). n dit que ce triangle est pseudo-rectangle en A si $|\hat{B} - \hat{C}| = \frac{\pi}{2}$ · On précise qu'il est pseudo-rectangle en A, obtus en B dans le cas où $\hat{B} - \hat{C} = \frac{\pi}{2}$ ·

1. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si le triangle ABD est rectangle en A.
2. Montrer que $PA^2 = PB.PC$ si et seulement si le triangle ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A.
3. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si son orthocentre est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC).
4. Soit R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que $PB + PC = 2R$ si et seulement si ABC est rectangle en A ou pseudo-rectangle en A.
5. Montrer que le triangle ABC est pseudo-rectangle en A si et seulement si la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.
6. Dans le plan complexe associé au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note α, β, γ les affixes des points non alignés A, B, C.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\frac{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\beta-\gamma)^2}$ pour que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.
   (b) On suppose $\beta = -\gamma = e^{i\pi/4}$. Déterminer l'ensemble (E_1) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A.
   (c) On suppose $\beta = -\gamma = 1$. Déterminer l'ensemble (E_2) des points A du plan tels que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A. d) Par quelle transformation géométrique simple passe-t-on de (E_2) à (E_1) ?

Deuxième Partie

1. Soit (a, b, c) un triplet de réels strictement positifs. Établir l'équivalence des conditions suivantes :

i il existe un triangle ABC pseudo-rectangle en A et obtus en B tel que $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$;

ii $b^2 - c^2 = a\sqrt{b^2 + c^2}$;

iii il existe deux réels ρ et θ vérifiant $\rho > 0$, $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ et $a = \rho cos 2\theta$, $b = \rho \cos\theta$ et $c = \rho \sin\theta$.

2. Ces conditions étant réalisées, montrer que θ mesure l'un des angles du triangle ABC. Comment peut-on interpréter géométriquement ρ ?
3. Soit ABC un triangle pseudo-rectangle en A, obtus en B et dont les longueurs des côtés sont des nombres rationnels ; soit ρ et θ les deux réels définis au 1. [iii]. Dans cette question, on pourra utiliser sans justification les formules trigonométriques suivantes vérifiées par tout réel ϕ pour lequel $\tan\phi$ est définie :

$$\cos 2\phi = \frac{1 - \tan^2\phi}{1 + \tan^2\phi}, \quad sin 2\phi = \frac{2tan\phi}{1 + \tan^2\phi}.$$

   (a) Montrer que ρ est rationnel et en déduire que $\tan\frac{\theta}{2}$ est rationnel. Soient p et q les entiers strictement positifs et premiers entre eux tels que $\tan\frac{\theta}{2} = \frac{p}{q}$.

   (b) Vérifier que $0 < p < q(\sqrt{2} - 1)$ et établir l'existence d'un rationnel strictement positif r tel que

$$\begin{aligned} a &= r(p^4 - 6p^2q^2 + q^4), \\ b &= r(q^4 - p^4), \\ c &= 2pqr(p^2 + q^2). \end{aligned}$$

4. Montrer réciproquement que les formules du 2. b) définissent les longueurs des côtés d'un triangle pseudorectangle en A, obtus en B et dont les longueurs des côtés sont rationnelles.
5. (a) Soient p et q deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Déterminer le plus grand diviseur commun aux trois entiers $p^4 - 6p^2q^2 + q^4$, $q^4 - p^4$, $2pq(p^2 + q^2)$ (on discutera suivant la parité de p et q).

   (b) Décrire les triplets d'entiers (a, b, c) tels qu'il existe un triangle ABC, pseudo-rectangle en A obtus en B, tel que $AB = c$, $BC = a$ et $CA = b$.

   (c) Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.

   (d) Résoudre dans $\mathbb{Q}^*$ l'équation $x^2(y^2 + z^2) = (y^2 - z^2)^2$.

   (e) Résoudre dans $\mathbb{N}^*$ l'équation $x^2(y^2 - z^2)^2 = (y^2 + z^2)^3$.

Troisième Partie

Soit H la courbe définie par $x \geq 1$ et $y = x^2 - 1$. Soient A un point de H et (r, s) le couple de ses coordonnées. On note $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan définie par les relations $1 \leq x \leq r$ et $y^2 \leq x^2 - 1$.

1. Calculer A en fonction de r et de s (on pourra par exemple effectuer une rotation du repère d'angle $-\pi/4$).
2. *Le but de cette question est de retrouver le résultat précédent en utilisant une méthode dont le principe remonte à Fermat, sans doute peu après 1658 :* « De æquationum localium transmutatione et emendatione ad ultimodam curvilineorum inter se vel cum rectilineis comparationem, cui annectitur proportionis geometricæ in quadrandis infinitis parabolis et hyperbolis usu »(Œuvres complètes, Tome I, pages 225-285).

   Soit n un entier naturel non nul et u un réel positif tel que $u^n = r + s$. Pour tout entier k entre 1 et n, on considère le trapèze rectangle Tk (éventuellement réduit à un triangle) dont le côté oblique est le segment ayant pour extrémités les points de coordonnées $(u^{k-1}, 0)$ et $(u^k, 0)$, dont les bases ont pour pente -1 et dont l'un des angles droits a pour sommet le point de H d'abscisse $\frac{u^{k-1}+u^{1-k}}{2}$.
3. (a) On définit bien ainsi, pour chaque valeur de k, un unique trapèze T_k (réduit à un triangle lorsque $k = 1$) : illustrer par un croquis.

   (b) Pourquoi peut-on conjecturer que la somme des aires de ces trapèzes admet $\frac{\mathcal{A}+s^2}{2}$ comme limite lorsque n tend vers l'infini ?

   (c) Démontrer la conjecture précédente en utilisant une autre suite de trapèzes combinée à la première.

   (d) Retrouver la valeur de $\mathcal{A}$.
4. Soient B et C les points de coordonnées respectives $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et A un point de coordonnées (x, y) avec $x \geq 0$ et $y \geq 0$ tel que le triangle ABC soit pseudo-rectangle en A. On note S l'aire du triangle ABC et S l'aire de la partie du plan constituée des points de la plaque triangulaire définie par le triangle ABC dont les coordonnées (X, Y) vérifient $Y^2 \leq X^2 - 1$. Étudier une éventuelle limite lorsque x tend vers l'infini du rapport $\frac{S'}{S}$.

Quatrième Partie

Cette partie se déroule dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ *associé aux coordonnées* (x, y, z).

Dans le plan d'équation $z = 0$, soit (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et soient T et P deux points distincts tels que la droite (TP) soit tangente au cercle (C) en T . Soient B et C les intersections de la droite (OP) avec le cercle (C) et (D) la droite perpendiculaire au plan d'équation $z = 0$ passant par P.

1. (a) Montrer qu'il existe deux points A et A appartenant ‘ a la droite (D) tels que les triangles ABC et A BC soient pseudo-rectangles respectivement en A et A ; donner une construction simple de ces deux points.

   (b) Montrer que les coordonnées de ces deux points vérifient l'égalité $x^2 + y^2 = z^2 + 1$.

2. Soit (H) l'ensemble des points A et A' quand T et P varient.
   (a) Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan orthogonal à $\vec{w}$.
   (b) Quelle est l'intersection de l'ensemble (H) avec un plan contenant la droite $(O;\vec{w})$?
   (c) Montrer que l'ensemble (H) est inclus dans une réunion de droites que l'on précisera.
3. On s'intéresse dans cette dernière question aux points entiers de l'ensemble (H), c'est-à-dire aux éléments de (H) dont les trois coordonnées sont des nombres entiers.
   (a) Soit (x, y, z) le triplet des coordonnées d'un tel point. Montrer que x ou y est impair. On note désormais S l'ensemble des triplets (x, y, z) d'entiers naturels strictement positifs tels que x est impair et $x^2+y^2 = z^2 + 1$.
   (b) Soit d un entier strictement positif fixé. Démontrer que l'ensemble des éléments (x, y, z) de S tels que $\mathrm{PGCD}(x+1, y+z) = d$ est l'ensemble vide si d est impair et un ensemble infini si d est pair.
   (c) Soit m un entier naturel impair supérieur ou égal à 3. Combien y a-t-il d'éléments (x, y, z) de S tels que $x = m$? Déterminer ces éléments lorsque $m = 3{,}5,\ 7,\ 9$.