Concours Général 2001

On appelle trio tout triplet de nombres réels (a, b, c) non tous nuls et vérifiant la relation :

$$ab + bc + ca = 0$$

Lorsque $a+b+c = 1$, on dit que le trio (a, b, c) est un trio réduit. Les coordonnées sont rapportées à un repère orthonormal direct $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de l'espace.

Première partie

On note C l'ensemble des points de coordonnées (a, b, c) où (a, b, c) est un trio. On note Γ l'ensemble des points de coordonnées (a, b, c) où (a, b, c) est un trio réduit. On note $\mathcal{P}$ le plan d'équation $x + y + z = 1$.

1. Existe-t-il des trios (a, b, c) tels que $a + b + c = 0$?
2. Montrer que C est une réunion de droites passant par O et privées de ce point.
3. Montrer que Γ est l'intersection d'un plan et d'une sphère de centre O. Quelle est la nature géométrique de G ?
4. Donner la nature géométrique de C et l'illustrer par un croquis.
5. Soit L un point fixé de Γ . Montrer que le volume V du tétraèdre $OLL'L''$, où L' et L'' sont deux points distincts de Γ et différents de L, est maximal lorsque les arêtes issues de O sont deux à deux orthogonales et déterminer alors les coordonnées de L' et L'' en fonction de celles de L.
6. Montrer que le produit abc admet un maximum et un minimum lorsque le point de coordonnées (a, b, c) décrit Γ. Préciser les trios réduits réalisant ces extremums.

Deuxième partie

Dans cette partie et les suivantes, un trio (a, b, c) est dit rationnel lorsque a, b, et c sont des nombres rationnels (éléments de l'ensemble $\mathbb{Q}$). Il est dit entier lorsque a, b et c sont des entiers relatifs (éléments de l'ensemble $\mathbb{Z}$). Enfin un trio entier est dit primitif si a , b et c n'admettent que 1 et -1 comme diviseurs communs.

1. Déterminer la nature de l'ensemble H_1 des points de coordonnées $(x, y, 1)$ tels que $(x, y, 1)$ soit un trio. Montrer que le point Ω_1 de coordonnées $(-1, -1, 1)$ est un centre de symétrie de H_1 . Quels sont les points de H_1 à coordonnées entières ?
2. Pour tout entier naturel non nul h, on note Z_h l'ensemble des trios entiers (a, b, c) tels que $c = h$. Déterminer Z_h pour $h = 1$ et $h = 2$.

3. Montrer que Z_h est un ensemble fini et exprimer le nombre $N(h)$ de ses éléments en fonction de celui des diviseurs de h^2 dans Z. Montrer que 4 divise $N(h) - 2$.
4. Pour tout entier naturel non nul h, on note $N'(h)$ le nombre des trios entiers (a, b, c) tels que l'un au moins des entiers a , b ou c soit égal à h. Exprimer $N'(h)$ en fonction $N(h)$ selon la parité de h.
5. Montrer qu'à tout trio entier (a, b, c) on peut associer un triplet (r, s, t) d'entiers tels que r et s soient premiers entre eux, s positif ou nul, et tels que l'on ait :

$$a = r(r + s)t, \quad b = s(r + s)t, \quad c = -rst.$$

   Énoncer et démontrer une réciproque. Pour quels trios (a, b, c) le triplet (r, s, t) n'est-il pas unique ?
6. Déterminer les triplets (r, s, t) ainsi associés aux trios primitifs. En déduire que si (a, b, c) est un trio primitif, alors $|abc|$, $|a + b|$, $|b + c|$ et $|c + a|$ sont des carrés d'entiers.
7. Pour tout entier naturel non nul h, on note $P(h)$ le nombre de trios primitifs (a, b, c) tels que $c = h$. Montrer que $P(h)$ est une puissance de 2.
8. Pour quels entiers h a-t-on $P(h) = N(h)$? Expliciter une suite d'entiers (h_n) telle que la suite converge vers zéro.
9. Soit $(a, b, 1)$ un trio. Montrer qu'il existe deux suites (x_n) et (y_n) convergeant respectivement vers a et b et telles que, pour tout n , $(x_n, y_n, 1)$ soit un trio rationnel.
10. Soit (a, b, c) un trio réduit. Montrer qu'il existe trois suites (x_n) , (y_n) et (z_n) convergeant respectivement vers a , b et c et telles que, pour tout n, (x_n, y_n, z_n) soit un trio rationnel réduit.

Troisième partie

On note j le nombre complexe $e^{2i\pi/3}$, c'est à dire $-\frac{1}{2} + i\sqrt{3}2$. Pour tout trio $T = (a, b, c)$ on note $\hat{T} = (a, c, b)$, $S(T) = a + b + c$ et $z(T) = a + bj + cj^2$.

1. Calculer le module de $z(T)$ en fonction de $S(T)$. Peut-on avoir $z(T) = 0$? Calculer le cosinus et le sinus d'un argument θ de $z(T)$ en fonction de a , b et c ?
2. Soit z_0 un nombre complexe non nul. Déterminer les trios $T = (a, b, c)$ tels que $z(T) = z_0$.
3. Étant donné deux trios T_1 et T_2, montrer qu'il existe un unique trio, noté $T_1 * T_2$, vérifiant $S(T_1 * T_2) = S(T_1 * T_2)$ et $z(T_1 * T_2) = z(T_1)z(T_2)$. Calculer $T_1 * T_2$ en fonction T_1 et T_2. Que peut-on en déduire[1] d'un argument de $z(T_1 * T_2)$? Que peut-on en déduire d'un argument de $z(T * \hat{T}_1)$?

1. dire ? Les sources divergent

4. Si T_1 et T_2 sont réduits, en est-il de même de $T_1 * T_2$? Si T_1 et T_2 sont entiers, en est-il de même de $T_1 * T_2$? Si T_1 et T_2 sont primitifs, en est-il de même de $T_1 * T_2$?
5. Comparer les trios $T_1 * T_2$ et $T_2 * T_1$, $(T_1 * T_2) * T_3$ et $T_1 * (T_2 * T_3)$, T_1 et $T_1 * (1, 0, 0)$.
6. Étant donnés les trios T_1 et T_2, résoudre l'équation $T_1 * T = T_2$, où le trio T est l'inconnue.
7. Étant donné un trio T, on définit une suite de trios (T_n) par $T_0 = (1, 0, 0)$ et $T_{n+1} = T * T_n$. Calculer $S(T_n)$. Etant donné un entier p, résoudre l'équation $T_p = T_0$ où le trio T est l'inconnue.

Quatrième partie

On note A l'ensemble des entiers m non nuls tels qu'il existe deux entiers u , v tels que $m = u^2 + 3v^2$. On note A' l'ensemble des nombres complexes z non nuls tels qu'il existe deux entiers u , v tels que $z = u + iv\sqrt{3}$ (on remarquera que $|z|^2 = u^2 + 3v^2$). On note B l'ensemble des entiers n non nuls tels qu'il existe deux entiers r et s tels que $n = r^2 + rs + s^2$.

1. Montrer que le produit de deux éléments de A' appartient à A' , puis que le produit de deux éléments de A appartient à A.
2. Montrer que , si p est un nombre premier élément de A, alors $p = 3$ ou 3 divise $p - 1$.
3. Montrer que $A = B$ (on pourra notamment remarquer que $r^2 + rs + s = (r + s)^2 - (r + s)s + s^2$).
4. Montrer que 4 divise les éléments pairs de A et que les quotients appartiennent à A, puis que tout élément de A est produit d'un élément impair de A par une puissance de 4.
5. (a) Soit, s'il en existe, un entier impair $m = u^2 + 3v^2$ tel que les entiers u et v soient premiers entre eux et qui admet un diviseur premier p n'appartenant à A. Montrer qu'il existe alors un plus petit élément strictement positif n_0 tel que n_0p appartienne à A. Montrer que n_0 est impair.
   (b) Établir l'existence de deux entiers u' et v' inférieurs en valeur absolue à $p/2$ tels que p divise $(u' - u)$ et $(v' - v)$. Montrer que p divise l'entier non nul $u'^2 + 3v'^2$ et que $n_0 < p$.
   (c) Établir l'existence de deux entiers non nuls premiers entre eux u_0 et v_0 tels que $n_0p = u_0^2 + 3v_0^2$.
   (d) Établir l'existence de deux entiers u_1 et v_1 inférieurs en valeur absolue à $n_0/2$ tels que n_0 divise $u_1 - u_0$ et $v_1 - v_0$. Montrer que n_0 divise l'entier non nul $u_1^2 + 3v_1^2$ que l'on notera n_0n_1.
   (e) En déduire qu'un tel entier n ne peut pas exister (on pourra considérer l'entier $n_0^2n_1p$).

(f) Montrer que tout élément de A s'écrit $m = C^2 p_1 p_2 \dots p_k$ où C est un entier naturel non nul et où les p_i sont des nombres premiers distincts éléments de A.

6. Soient p un nombre premier tel que 3 divise $p-1$, et K l'ensemble des triplets (x, y, z) où les entiers x , y et z sont strictement compris entre 0 et p, et tels que p divise $(xyz-1)$. Montrer que K possède $(p-1)^2$ éléments, et que 3 divise le nombre d'éléments de K ne vérifiant pas $x = y = z$.
7. En déduire qu'il existe un entier x strictement compris entre 1 et p tel que p divise $x^2 + x + 1$, puis que p appartient à A. Décrire les éléments de A.
8. Soit D l'ensemble des entiers d tels qu'il existe un trio d'entiers (a, b, c) vérifiant $a + b + c = d$ et $abc \neq 0$. Montrer, grâce à la question 5) de la deuxième partie, que tout élément de D possède un diviseur premier élément de A. Réciproquement, que peut-on dire d'un entier non nul admettant un diviseur premier élément de A ?
9. En déduire les éléments de D compris au sens large entre 2001 et 2010.