Exercice 1

On dispose de b boules blanches et n boules noires - au moins une de chaque -, que l'on répartit entre deux urnes de façon qu'aucune d'elles ne soit vide ; on note s le nombre de boules dans la première, et r celui de ces boules qui sont blanches. L'évènement considéré est le tirage d'une boule au hasard dans l'une des urnes choisie au hasard ; le but de l'exercice est de déterminer les répartitions rendant maximale la probabilité p de tirer une boule blanche.

1. Exprimer p en fonction de b, n, r et s.
2. Dans cette question, l'on fixe la valeur de s ; comment choisir r pour augmenter p ?
3. Résoudre l'exercice.
4. Quelles généralisations proposez-vous en augmentant les nombres de couleurs et d'urnes ?

Problème

Ce problème traite des triangles ABC dits cartésiens, c'est à dire à cotés entiers $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ dont l'angle en A mesure $\frac{2\pi}{3}$ radians. Sauf avis contraire ABC est supposé cartésien.

1. Notant H son orthocentre orthogonalement projeté en (U, V, W) sur les trois cotés, déterminer les nombres rationnels parmi
$$AU, BV, CW, HA, HB, HC, HU, HV, HW, AW, AV, BU, BW, CV \text{ et } CU.$$
2. Notant I son son centre du cercle inscrit, J l'intersection de la bissectrice intérieure en A et des bissectrices extérieures en les autres sommets, et P, Q les intersections de la droite BC et des deux bissectrices en A, déterminer les nombres rationnels parmi
$$PB, PC, QB, QC, AI, AJ, AP \text{ et } AQ.$$
3. On suppose désormais b et c premiers entre eux. Montrer que, quitte à échanger b et c, $a + b - c$ est multiple de 3 et $a - b + c$ ne l'est pas.
4. On pose $\frac{a+b-c}{3c} = \frac{p}{q}$ où p et q sont des entiers strictement positifs premiers entre eux. Notant d le PGCD de $p(3p + 2q)$ et de $q(2p + q)$, calculer a, b et c en fonction de p, q et d.
5. Montrer que q n'est pas multiple de 3, puis que $d = 1$.
6. En déduire une condition nécéssaire et suffisante pour qu'un triangle soit cartésien de cotés premiers entre eux puis, par des remarques géométriques, une caractérisation analogue des triangles à cotés entiers $BC = a$, $CA = b$ et $AB = c$ premiers entre eux dont l'angle en A mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.

Exercice 2

Soient A, B, C trois points deux à deux distincts dans l'espace, (A) une sphère de centre A et de rayon r, et E l'ensemble des nombres $R > 0$ tels qu'il existe une sphère (H) de centre H et de rayon R par rapport à laquelle les points B et C sont strictement extérieurs (c'est à dire par exemple tels que $HB > R$), et les points de (A) strictement intérieurs.

1. Dans cette question, B et C sont alignés et strictement extérieurs à (A). Montrer que E est non vide et majoré. Calculer le plus petit de ses majorants en fonction des données.
2. Déterminer une condition nécéssaire et suffisante pour E soit non vide et majoré.
3. Calculer, lorsqu'il existe, le plus petit des majorants de E.