

Concours Général 1999

1. Quel est le volume maximum d'un cylindre ayant le même axe de révolution qu'un cône donné et intérieur à ce cône ? Quel est le volume maximum d'une sphère centrée sur cet axe et intérieure à ce cône ? Comparer les deux maximums trouvés.
2. Résoudre dans \mathbb{N} l'équation en n ,

$$(n + 3)^n = \sum_{k=3}^{n+2} k^n.$$

3. Pour quels triangles aux angles tous aigus le quotient du plus petit côté par le rayon du cercle inscrit est-il maximum ?
4. Sur une table trônent 1999 bonbons rouges et 6661 bonbons jaunes rendus indiscernables par des emballages uniformes. Un gourmand applique jusqu'à épuisement du stock l'algorithme suivant :
 - (a) S'il reste des bonbons, il en tire un au hasard, note sa couleur, le mange et va en b.
 - (b) S'il reste des bonbons, il en tire un au hasard et note sa couleur.
 - si elle est la même que celle du dernier bonbon avalé, il le mange et retourne en b.
 - sinon, il le remailotte, le pose et retourne en a.

Montrer que tous les bonbons seront mangés et donner la probabilité pour que le dernier bonbon mangé soit rouge.

5. Montrer que les symétriques de chaque sommet d'un triangle par rapport au côté opposé sont alignés si et seulement si la distance de l'orthocentre au centre du cercle circonscrit est égale à son diamètre.