**Concours Général 1998**

1. Un tétraèdre $ABCD$ vérifie les conditions suivantes
   (a) les arêtes $AB, AC, AD$ sont deux à deux orthogonales
   (b) on a : $AB = 3$ et $CD = \sqrt{2}$.

   Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6$.

2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel $n$, la relation : $u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n$.

   Montrer qu'il existe un entier $p$ non nul tel que la relation : $u_{n+p} = u_n$ ait lieu pour tout entier naturel $n$.

3. Pour tout réel $x$, on note $E(x)$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à $x$. Soit $k$ un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par : $f(n) = n + E((n + n^{1/k})^{1/k})$.

   Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction $f$.

4. On considère deux droites $D_1$ et $D_2$ sécantes en $O$, et un point $M$ n'appartenant à aucune de ces droites. On considère deux points variables, $A$ sur $D_1$, $B$ sur $D_2$, tels que le point $M$ appartienne au segment $[AB]$.

   *Les deux questions sont indépendantes.*

   (a) Montrer qu'il existe une position des points $A$ et $B$ pour laquelle l'aire du triangle $OAB$ est minimale. Construire les points $A$ et $B$ ainsi déterminés.

   (b) Montrer qu'il existe une position des points $A$ et $B$ pour laquelle le périmètre du triangle $OAB$ est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles $OAM$ et $OBM$, ainsi que la relation

   $$\frac{AM}{\tan\frac{\widehat{OAM}}{2}} = \frac{BM}{\tan\frac{\widehat{OBM}}{2}}.$$

   Construire les points $A$ et $B$ ainsi déterminés.

5. Soit $n$ un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble $A$ de $n$ points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.

   Montrer qu'il existe un ensemble $S$ de $2n - 5$ points du plan tel que, pour tout triangle dont les sommets sont des points de $A$, il existe au moins un point de $S$ qui lui soit strictement intérieur.