

## Concours Général 1997

1. On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est écrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.

Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y a-t-il de choix possibles ?

2. Une capsule spatiale a la forme du solide de révolution délimité par une sphère de centre  $O$ , de rayon  $R$ , et un cône de sommet  $O$  qui rencontre cette sphère selon un cercle de rayon  $r$ .

Quel est le volume maximal d'un cylindre droit contenu dans cette capsule, le cylindre et la capsule ayant le même axe de révolution ?

3.  $C$  est un cube d'arête 1 et  $p$  la projection orthogonale sur un plan.

Quelle est la valeur maximale de l'aire de  $p(C)$  ?

4. Étant donné un triangle  $ABC$ , on note  $a, b, c$  les longueurs de ses côtés et  $m, n, p$  les longueurs de ses médianes. Pour tout réel  $\alpha$  strictement positif, on définit le réel  $\lambda(\alpha)$  par la relation :

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = (\lambda(\alpha))^\alpha (m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha).$$

- (a) Calculer  $\lambda(2)$ .
  - (b) Calculer la limite de  $\lambda(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  tend vers 0.
  - (c) À quelle condition portant sur  $a, b, c$  le réel  $\lambda(\alpha)$  est-il indépendant de  $\alpha$  ?
5. Dans le plan, soient  $A$  et  $B$  deux points distincts. Pour tout point  $C$  extérieur à la droite  $(AB)$ , on note  $G$  l'isobarycentre du triangle  $ABC$  et  $I$  le centre du cercle inscrit.
    - (a) Soit  $\alpha$  un réel tel que  $0 < \alpha < \pi$ . Quel est l'ensemble  $\Gamma$  des points  $C$  tels que  $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \alpha + 2k\pi$ ,  $k$  étant un entier ? Lorsque  $C$  décrit  $\Gamma$ , montrer que  $G$  et  $I$  décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.
    - (b) On suppose désormais  $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$ . Comment doit-on choisir  $C$  dans  $\Gamma$  pour que la distance  $GI$  soit minimale ?

- (c) On note  $f(\alpha)$  la distance minimale  $GI$  de la question précédente. Expliciter  $f(\alpha)$  en fonction de  $a = AB$  et  $\alpha$ . Déterminer la valeur maximum de  $f(\alpha)$  lorsque  $\alpha$  décrit  $] \frac{\pi}{3}, \pi[$ .