

Concours Général 1997

1. On a placé un jeton sur chaque sommet d'un polygone régulier à 1997 côtés. Sur chacun de ces jetons est écrit un entier relatif, la somme de ces entiers relatifs étant égale à 1. On choisit un sommet de départ et on parcourt le polygone dans le sens trigonométrique en ramassant les jetons au fur et à mesure tant que la somme des entiers inscrits sur les jetons ramassés est strictement positive.

Peut-on choisir le sommet de départ de façon à ramasser tous les jetons ? Si oui, combien y a-t-il de choix possibles ?

2. Une capsule spatiale a la forme du solide de révolution délimité par une sphère de centre O , de rayon R , et un cône de sommet O qui rencontre cette sphère selon un cercle de rayon r .

Quel est le volume maximal d'un cylindre droit contenu dans cette capsule, le cylindre et la capsule ayant le même axe de révolution ?

3. C est un cube d'arête 1 et p la projection orthogonale sur un plan.

Quelle est la valeur maximale de l'aire de $p(C)$?

4. Étant donné un triangle ABC , on note a, b, c les longueurs de ses côtés et m, n, p les longueurs de ses médianes. Pour tout réel α strictement positif, on définit le réel $\lambda(\alpha)$ par la relation :

$$a^\alpha + b^\alpha + c^\alpha = (\lambda(\alpha))^\alpha (m^\alpha + n^\alpha + p^\alpha).$$

(a) Calculer $\lambda(2)$.

(b) Calculer la limite de $\lambda(\alpha)$ lorsque α tend vers 0.

(c) À quelle condition portant sur a, b, c le réel $\lambda(\alpha)$ est-il indépendant de α ?

5. Dans le plan, soient A et B deux points distincts. Pour tout point C extérieur à la droite (AB) , on note G l'isobarycentre du triangle ABC et I le centre du cercle inscrit.

(a) Soit α un réel tel que $0 < \alpha < \pi$. Quel est l'ensemble Γ des points C tels que $(\vec{CA}, \vec{CB}) = \alpha + 2k\pi$, k étant un entier ? Lorsque C décrit Γ , montrer que G et I décrivent deux arcs de cercle que l'on précisera.

(b) On suppose désormais $\frac{\pi}{3} < \alpha < \pi$. Comment doit-on choisir C dans Γ pour que la distance GI soit minimale ?

- (c) On note $f(\alpha)$ la distance minimale GI de la question précédente. Expliciter $f(\alpha)$ en fonction de $a = AB$ et α . Déterminer la valeur maximum de $f(\alpha)$ lorsque α décrit $]\frac{\pi}{3}, \pi[$.