Concours Général 1996

EXERCICE I

Dans le plan, on considère un triangle ABC et les six points D, E, F, G, H, I tels que $ABED$, $BCGF$ et $ACHI$ soient des carrés extérieurs à ABC. Montrer que les points D, E, F, G, H, I sont cocycliques si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivants :
— le triangle ABC est équilatéral ;
— le triangle ABC est rectangle et isocèle.

EXERCICE II

Soient a un entier naturel impair et b un entier strictement positif.
On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie :

$$u_0 = b \text{ et pour tout entier naturel } n \left\{ \begin{array}{l} \text{si } u_n \text{ est un entier pair, alors } u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n \\ \text{sinon } u_{n+1} = a + u_n \end{array} \right.$$

1. Démontrer que l'on peut trouver un entier naturel n tel que $u_n \leq a$.
2. Démontrer que la suite est périodique à partir d'un certain rang.

EXERCICE III

1. Soit un parallélépipède rectangle. Montrer que l'on peut choisir quatre de ses sommets de façon à obtenir un tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles.
2. Réciproquement, montrer que tout tétraèdre dont les quatre faces sont des triangles rectangles peut s'obtenir en choisissant quatre sommets d'un parallélépipède rectangle.
3. Rechercher parmi ces tétraèdres ceux qui ont aussi au moins deux faces isocèles. Donner les longueurs des arêtes en fonction de la longueur a de la plus petite arête.

EXERCICE IV

1. Soit la fonction f définie, pour tout réel x strictement positif, par $f(x) = x^x$. Déterminer la valeur minimale prise par cette fonction lorsque x décrit l'ensemble des réels strictement positifs.
2. Soient x et y deux réels strictement positifs, montrer que $x^y + y^x > 1$.

EXERCICE V

Soit n un entier naturel non nul. On dit qu'un entier naturel non nul k vérifie la condition C_n s'il existe $2k$ entiers naturels $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k$ tous distincts, tels que les sommes $a_1 + b_1, \ldots, a_k + b_k$ soient deux à deux distinctes et strictement inférieures à n

1. Montrer que si k vérifie la condition C_n, alors $k \leq \frac{2n-3}{5}$.
2. Montrer que 5 vérifie la condition C_{14}.
3. On suppose $\frac{2n-3}{5}$ entier. Montrer que $\frac{2n-3}{5}$ vérifie la condition C_n.