Concours Général 1994

1. Pour tout entier naturel n, on note I_n le nombre d'entiers p pour lesquels $50^n < 7^p < 50^{n+1}$.
   (a) Démontrer que pour tout entier n, I_n vaut 2 ou 3.
   (b) Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels I_n vaut 3 et donner le plus petit d'entre eux.
2. Soit Σ une demi-sphère et P le plan contenant son cercle de base. Un plan variable Q, parallèle à un plan fixe non perpendiculaire à P, coupe Σ suivant un cercle C. On désigne par C' le projeté orthogonal de C sur P. Comment doit-on placer le plan Q pour que le cylindre de bases C et C' ait un volume maximal ?
3. On définit une application f de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}$ par : $f(1) = 0$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$:

   $$f(2n) = 2f(n) + 1, \quad f(2n+1) = 2f(n).$$

   Étant donné un entier strictement positif p quelconque, on pose : $u_0 = p$ et, tant que u_k appartient à $\mathbb{N}^*$, $u_{k+1} = f(u_k)$.
   (a) Montrer que, pour tout choix de p, il existe un unique entier $\nu(p)$ tel que $u_{\nu(p)} = 0$.
   (b) i. Calculer $\nu(1994)$.
   Quel est le plus petit entier p tel que $\nu(p) = \nu(1994)$?
   ii. Étant donné un entier N, déterminer le plus petit entier p tel que $\nu(p) = N$.
4. Soit (ABC) un triangle. Si P est un point de son plan, on note L, M, N les projetés orthogonaux de P respectivement sur les droites $(BC), (CA)$ et (AB). Déterminer le point P pour lequel la quantité $BL^2 + CM^2 + AN^2$ est minimale.
5. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que :
   $f(1) > 0$ et, quels que soient les entiers naturels m et n, on a :

   $$f(m^2 + n^2) = (f(m))^2 + (f(n))^2.$$

   (a) Calculer $f(k)$ pour $0 \leq k \leq 12$.
   (b) Calculer $f(n)$, n étant un entier quelconque.