

Concours Général 1993

EXERCICE I

On appelle boîte de poids, tout ensemble de poids comprenant :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \text{ poids de } d_1 \text{ grammes chacun} \\ x_2 \text{ poids de } d_2 \text{ grammes chacun} \\ \dots \\ x_k \text{ poids de } d_k \text{ grammes chacun} \end{array} \right.$$

Les nombres x_i et d_i (pour $1 \leq i \leq k$) étant des entiers naturels non nuls, tels que :

$$1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k.$$

On pose $n = x_1d_1 + x_2d_2 + \dots + x_kd_k$ et on dit que la masse totale de la boîte de poids est n grammes.

Cette boîte de poids est dite "parfaite" si elle permet d'obtenir, de manière unique, toute masse de $0, 1, \dots, n$ grammes, c'est à dire si, pour tout entier m de l'ensemble $\{0, 1, \dots, n\}$, il existe des entiers y_1, y_2, \dots, y_k uniques tels que pour tout indice i , $1 \leq i \leq k$, on ait : $0 \leq y_i \leq x_i$ et $m = y_1d_1 + y_2d_2 + \dots + y_kd_k$.

1. Déterminer toutes les boîtes de poids de masse totale 5 grammes. Quelles sont celles qui sont parfaites ?
2. Montrer que pour une boîte de poids parfaite de masse totale n grammes, on a, avec les notations du préambule :

$$(1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k) = n + 1.$$

3. Inversement, on se donne k entiers x_1, x_2, \dots, x_k strictement positifs (k non nul), et on définit n par :

$$n + 1 = (1 + x_1)(1 + x_2) \dots (1 + x_k).$$

Montrer qu'il existe des entiers d_1, d_2, \dots, d_k uniques avec $1 \leq d_1 < d_2 < \dots < d_k$ tels que la boîte de poids composée de x_1 poids de d_1 grammes, x_2 poids de d_2 grammes, ..., x_k poids de d_k grammes soit parfaite.

4. Déterminer toutes les boîtes de poids parfaites de masse totale 1993 grammes.

EXERCICE II

Soit n un entier strictement positif donné.

1. Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs a_0, a_1, \dots, a_{2n} rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0 + a_1 + \dots + a_n = a_{n+1} + \dots + a_{2n}?$$

2. Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs a_0, a_1, \dots, a_{2n} rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 = a_{n+1}^2 + \dots + a_{2n}^2?$$

3. Existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs a_0, a_1, \dots, a_{2n} rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0^3 + a_1^3 + \dots + a_n^3 = a_{n+1}^3 + \dots + a_{2n}^3?$$

Pour cette question, on pourra étudier les variations de la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = (x - n)^3 + (x - n + 1)^3 + \dots + x^3 - (x + 1)^3 - \dots - (x + n)^3$$

On montrera que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_n vérifiant :

$$3n(n + 1) < x_n < 3n(n + 1) + 1.$$

On pourra utiliser l'égalité $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$.

EXERCICE III

Soit f une application de l'ensemble \mathbb{Z} des entiers relatifs dans l'ensemble \mathbb{R} des réels.

On suppose que f est minorée et vérifie : pour tout entier relatif n , $f(n) \leq \frac{1}{2}[f(n + 1) + f(n - 1)]$.

Montrer que l'application f est constante.

EXERCICE IV

Soit dans le plan un disque \mathcal{D} de rayon 1.

1. Montrer qu'il est impossible de recouvrir \mathcal{D} avec deux disques de même rayon r , lorsque r est strictement inférieur à 1.
2. Montrer que, pour certaines valeurs de r , $r < 1$, il est possible de recouvrir le disque \mathcal{D} avec trois disques de même rayon r . Quelle est la plus petite valeur de r permettant un tel recouvrement ?

EXERCICE V

1. Soit A et B deux points distincts de l'espace.
 - (a) Parmi les triangles MAB d'aire donnée, quels sont ceux de périmètre minimal ?
 - (b) Parmi les triangles MAB de périmètre donné, quels sont ceux d'aire maximale ?
2. Soit, dans un tétraèdre de volume V , a, b, c, d les longueurs de quatre arêtes, telles que trois quelconques d'entre elles ne sont pas coplanaires, et $L = a + b + c + d$.
Déterminer la valeur maximale du quotient $\frac{V}{L^3}$.