Concours Général 1992

EXERCICE I

On dit qu'une partie non vide Δ du plan $\mathcal{P}$ est convexe si elle possède la propriété suivante :

— Pour tout couple (M, N) de points de Δ, le segment $[MN]$ est contenu dans Δ.

Soit Δ une partie convexe du plan $\mathcal{P}$. Si A est un point de $\mathcal{P}$, à tout couple (M, N) de points de Δ on associe le point m défini par $\vec{Am}=\frac{1}{2}\vec{MN}$ et on note $\delta_A(\Delta)$ l'ensemble des points m ainsi obtenus.

1. (a) Montrer que $\delta_A(\Delta)$ admet un centre de symétrie.
   (b) À quelle condition a-t-on $\delta_A(\Delta) = \Delta$?
   (c) Soit B et C deux points du plan $\mathcal{P}$. Par quelle transformation passe-t-on de $\delta_B(\Delta)$ à $\delta_C(\Delta)$?
2. Soit A un plan du point $\mathcal{P}$. Déterminer et représenter $\delta_A(\Delta)$lorsque :
   (a) Δ est une bande du plan $\mathcal{P}$ délimitée par deux droites parallèles.
   (b) Δ est délimitée par un triangle.
   (c) Δ est un demi-disque.
3. Montrer que dans les deux cas 2.b. et 2.c., les contours de Δ et $\delta_A(\Delta)$ ont la même longueur.

EXERCICE II

Soit $(\mathcal{C})$ un cercle du plan de rayon 1.

1. Déterminer les triangles inscrits dans le cercle $(\mathcal{C})$ pour lesquels la somme $AB^2 + BC^2 + CA^2$ est maximale.
2. Déterminer les quadrilatères $ABCD$ inscrits dans le cercle $(\mathcal{C})$ pour lesquels la somme $AB^2 + AC^2 + AD^2 + BC^2 + BD^2 + CD^2$ est maximale.
   Représenter un tel quadrilatère.

EXERCICE III

Soit $ABCD$ un tétraèdre inscrit dans une sphère de centre O. On note G l'isobarycentre des quatre soomets du tétraèdre et I le centre de la sphère inscrite dans le tétraèdre.

Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalents :

1. Les deux points O et G sont confondus.

2. Les quatre faces du tétraèdre sont isométriques.
3. Les deux points O et I sont confondus.

EXERCICE IV

Soit (u_n) la suite numérique définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1, $0 < u_0 < 1$ et $0 < u_1 < 1$, et la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = \frac{1}{2}(\sqrt{u_{n+1}} + \sqrt{u_n}).$$

1. Montrer que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Montrer qu'à partir d'un certain rang n_0, la suite (u_n) est monotone (on ne demande pas de déterminer n_0 qui dépend des valeurs initiales u_0 et u_1).

EXERCICE V

Quel est le chiffre des unités du plus grand nombre entier inférieur ou égal à $\frac{10^{1992}}{10^{83}+7}$?