Concours Général 1991

EXERCICE I

1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que, pour tout nombre entier naturel n :

$$x_0^3 + x_1^3 + \dots x_n^3 = (x_0 + x_1 + \dots + x_n)^2.$$

   Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que :

$$x_0 + x_1 + \dots + x_n = \frac{m(m+1)}{2}.$$

2. Si n et p sont deux nombres entiers naturels non nuls, on pose :

$$S_{n,p} = 1^p + 2^p + \dots + n^p.$$

   Déterminer les entiers naturels non nuls p tels que, quel que soit l'entier naturel non nul n, $S_{n,p}$ soit le carré d'un nombre entier naturel.

EXERCICE II

À tout nombre entier naturel non nul n, on associe l'application f_n de la variable réelle x, définie pour $x \geq n$ par :

$$f_n(x) = \sqrt{x-n}+\sqrt{x-n+1}+\dots+\sqrt{x-1}+\sqrt{x}+\sqrt{x+1}+\dots+\sqrt{x+n}-(2n+1)\sqrt{x}.$$

1. Dans cette question, l'entier n est fixé.

   Montrer que f_n est croissante et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$.

2. Déterminer la limite de la suite de terme général $f_n(n)$.

EXERCICE III

Soit S un point fixe d'une sphère fixe (Σ) de centre Ω. On considère les tétraèdres $SABC$ inscrits dans la sphère (Σ) et dont les arêtes issues de S sont deux à deux orthogonales.

1. Montrer que les plans (ABC) passent par un point fixe.
2. Pour un tel tétraèdre $SABC$, le point S et le centre Ω de la sphère (Σ) se projettent orthogonalement sur le plan (ABC) respectivement en H et O. On note R le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
   Démontrer que : $R^2 = OH^2 + 2SH^2$.

EXERCICE IV

Soit p un nombre entier naturel et $n = 2^p$.
On considère les parties A de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, n\}$ possédant la propriété suivante :

si x appartient à A, alors $2x$ n'appartient pas à A.

Déterminer le nombre maximal d'éléments d'une telle partie A.

EXERCICE V

1. On considère l'application P de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$P(z) = z^5 + a_4 z^4 + a_3 z^3 + a_2 z^2 + a_1 z$$

   où a_1, a_2, a_3 et a_4 sont quatre nombres complexes donnés.
   On pose $w_\ell = e^{\frac{2i\ell\pi}{5}}$, où ℓ désigne un nombre entier compris entre 0 et 4.
   Montrer que $P(w_0) + P(w_1) + P(w_2) + P(w_3) + P(w_4) = 5$.

2. Soient A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 cinq points du plan. On construit un pentagone régulier inscrit dans le cercle de centre A_1 et de rayon donné R.
   Démontrer qu'il existe un sommet S du pentagone tel que :

$$SA_1.SA_2.SA_3.SA_4.SA_5 \geq R^5.$$