Concours Général 1988

PROBLÈME I

N, p, n sont des entiers naturels non nuls.

On considère un tableau rectangulaire T ayant n lignes numérotées de 1 à n et p colonnes numérotées de 1 à p.

Pour i variant de 1 à n et k variant de 1 à p, on inscrit à l'intersection de la ligne de rang i et de la colonne de rang k un entier a_{ik} compris, au sens large, entre 1 et N, c'est-à-dire vérifiant les inégalités $1 \leq a_{ik} \leq N$.

Soit E_i l'ensemble des entiers figurant dans la ligne de rang i.

Question 1

Dans cette question, on impose au tableau T les deux conditions suivantes :

1. Pour i variant de 1 à n, E_i a exactement p éléments ;
2. Pour deux rangs distincts i et j, les ensembles E_i et E_j sont différents.

Soit m la plus petite valeur de N permettant de constituer, pour des valeurs données de n et de p, un tableau T satisfaisant aux deux conditions précédentes.

1. Calculer m pour $n = p + 1$.
2. Calculer m pour $n = 1030$ et $p = 1988$.
3. Déterminer la limite de $\frac{m^p}{n}$ lorsque, p étant fixé, n tend vers l'infini.

Question 2

Dans cette question, on impose au tableau T, à la place des conditions précédentes, les deux conditions suivantes :

1. $p = n$;
2. Pour tout couple d'entiers naturels non nuls (i, k), tel que $i + k \leq n$, l'entier a_{ik} n'appartient pas à l'ensemble E_{i+k}.

1. Montrer que, pour i et j distincts, E_i et E_j sont différents.
2. Montrer que si $n \geq 2^q$, q étant un entier positif non nul, alors $N \geq q+1$.
3. On suppose que $n = 2^r - 1$, r étant un entier non nul donné.
   Montrer que l'on a : $N \geq r$. Montrer que l'on peut effectivement construire un tel tableau pour $N = r$.

EXERCICE II

Déterminer, pour n entier positif, le signe de $n^6 + 5n^5 \sin n + 1$.

Déterminer pour quels entiers positifs n l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\frac{n^2 + 5n \cos n + 1}{n^6 + 5n^5 \sin n + 1} \geq 10^{-4}$$

EXERCICE III

On considère deux sphères S_1 et S_2 et une droite (D) ne les rencontrant pas.

Pour $i = 1$ et $i = 2$, on désigne par C_i le centre de S_i, par H_i la projection orthogonale de C_i sur (D), par r_i le rayon de S_i et par di la distance de C_i à (D).

Soit M un point de (D) et, pour $i = 1$ et $i = 2$, T_i le point de contact avec S_i d'un plan tangent à S_i passant par M ; on pose $d_i(M) = MT_i$.

Situer M sur (D) de façon à ce que la quantité $d_1(M)+d_2(M)$ soit minimale.

EXERCICE IV

Dans le plan, on considère un cercle (C) et cinq points distincts M_1, M_2, M_3, M_4 et M situés sur (C).

Montrer que le produit des distances de M aux droites (M_1M_2) et (M_3M_4) est égal au produit des distances de M aux droites (M_1M_3) et (M_2M_4).

Que peut-on en déduire pour $(2n + 1)$ points distincts $M_1, M_2, ..., M_{2n}$, M situés sur (C) ?