Concours Général 1983

I

On a $3^2+4^2=5^2$ et $3^3+4^3+5^3=6^3$. On cherche un réel a vérifiant :

$$3^a+4^a+5^a+6^a+\cdots+98^a+99^a=100^a$$

À chaque entier k tel que $1\leq k\leq 97$, on associe l'application f_k de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ définie par :

$$f_k(x)=(1-\frac{k}{100})^k.$$

1. Établir, pour x positif, $f_k(x)\leq[f_1(x)]^k$.
2. Prouver l'existence de a et son unicité .
3. Trouver la partie entière de a . (On s'appuiera sur 1. pour majorer a ,et sur des essais à la calcularice pour le minorer).

II

Une bijection f d'un ensemble fini E dans lui-même sera dite carré s'il existe une application g de E dans E telle que $g\circ g=f$. L'orbite d'un élément a de E pour f est, par définition, l'ensemble $\{a,f(a),f^2(a),\dots\}$ formé par a et les images successives de a.

1. Etude d'un exemple : E est la partie de $\mathbb{N}$ formée des entiers n tels que $1\leq n\leq 16$. f est définie par le tableau :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
f	2	4	5	8	9	10	11	13	15	12	14	16	1	7	3	6

   Déterminer les orbites et, en supposant qu'il existe g de carré f, étudier l'action de g sur ces orbites. Montrer que f est un carré.
2. Sachant seulement que E est fini et f bijective, prouver de manière générale que, pour chaque élément de E, la suite des images par f est périodique, et que les orbites constituent une partition de E. Une fois déterminés les nombres d'éléments des orbites de f, à quoi reconnait-on que f est un carré ?
3. m et p désignent deux entiers naturels dans nuls
   On donne $E=\{1,2,\dots,m\}\times\{1,2,...,p\}$, et la bijection f de E définie par : $f(i,j)=(i+1,p+1-j)$ si $i\neq m$ sinon $f(m,j)=(1,p+1-j)$
   f est-elle un carré ? Discuter suivant m et p

III

Expérience : Un plan euclidien est rapporté au répère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Placer les points P , P' , P'' , d'abscisse nulle, dont les cordonnées sont -1 ,$1-\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$. Tracer le cercle dont une équation dont une équation est $x^2+y^2-2x=0$. Vérifier qu'il existe sur ce cercle trois points M , M' , M'' tels que chacune des six distances MP', MP'' , $M'P''$, $M'P$, $M''P$, $M''P'$ soit égale à $\sqrt{3}$. On donnera les coordonnées de ces points.

IV

Définition d'une chaîne.

Dans le plan on considère un cercle (C), de centre A, de rayon R, et une droite (D) ne contenant pas A. Soit h la distance de A à (D), et soit c un réel positif. On nomme chaîne de côté c, reliant (C) à (D), toute confirguration formée de trois points distincts M_1 , M_2 , M_3 de (C) et de trois points distincts P_1 , P_2 , P_3 de (D) dans la quelle les six distances M_iP_j $(i \neq j)$ ont la valeur c. On note systématiquement, dans ce qui suit, i , j, k une permutation arbitraire de 1 , 2 , 3. L'objet de cette partie est de conduire à la condition nécessaire entre c, R et h pour l'existence d'une chaîne :

$$|c^2-R^2|=2Rh. \tag{1}$$

1. Réaliser la figure d'une chaîne ,en conformité avec (1). A toute chaîne seront associés les trois points M'_1, M'_2, M'_3 définis par les égalités :

   $$\overrightarrow{P_iM'_i}=\overrightarrow{P_iM_j}+\overrightarrow{P_iM_k}$$

   Construire ces points sur le dessin.
2. En s'aidant d'un repère et n'écrivant que des relations du premier degré entre les coodonnées des points concernés, montrer que, pour tout i = 1 , 2 , 3 , M_i et M'_i se correspondent dans une même symétrie axiale orthogonale, d'axe (D). Démontrer, d'autre part, que A appartient au cercle $M'_1M'_2M'_3$. Qu'en résulte-t-il pour l'axe de la sylétrie ?
3. Établir : $\overrightarrow{AP_i}.\overrightarrow{AM'_i}=R^2-c^2$. Démontrer la relation (1) . L'aspect suffisant de cette condition pour la construction des chaînes est précisé au IV, 3.

Définition d'un chaîne : (2) Dans le plan on considère deux cercles (C) et (C'), de centre distincts A et A' , de rayon R et R'. Soit d la distance AA', et c un réel positif. On nomme chaîne de côté c, reliant (C) et (C'), toute configuration formée de trois points distincts M_1 , M_2 , M_3 de (C) et de trois points distincts M'_1 , M'_2, M'_3 de (C'), dans laquelle les six distances $M_iM'_j$ $(i \neq j)$ ont la valeur c .

1. Étude du cas $c=R=R'$, $d \neq R$. Pour cette valeur du côté, quelle est la nature des quadrilétères $AM_1M_{j'}M_k$ et $A'M'_iM_jM_{k'}$? Par quelle

tranformation simple passe-t-on de M_i à M'_i ? Etablir l'égalité : $\overrightarrow{AM_1} + \overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{AM_3} = \overrightarrow{AA'}$. Situer le centre de gravité et l'orthocentre de chacun des triangles $M_1M_2M_3$ et $M'_1M'_2M'_3$. Pour fabriquer une chaîne on choisit M_1 sur (C), à une distance de A' inférieure à $2R$. Quelles valeurs de le permettent ? Obtient-on bien une chaîne ?

2. Étude du cas $d = R = R'$, $c \neq R$. Cette étude se prolongera au 3 . Tracer les cercles (C) , (C') centrés l'un sur l'autre, et réaliser une chaîne en se donnant le côté c, puis l'un des sommets. Quelles valeurs de le permettent ? Par quelle transformation simple passe-t-on de M_i à M'_i ? On pourra enfin comparer M_i et M'_i, introduire les deux symétries vectorielles orthogonales s et s' , définies par les conditions :
$$s(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{AM_2}, s'(\overrightarrow{A'A}) = \overrightarrow{A'M_3}$$
et chercher les images de par $s' \circ s$ et $s \circ s'$.
3. Même hypothèse pour c, d , R , R' qu'au 2. c pourra varier. Le plan est orienté et rapporté au repère orthonormé direct $(A; \vec{u}, \vec{v})$, $AA' = R\overrightarrow{u}$. Sur (C) chaque point M_i est repéré par une mesure q_i de $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{AM_i})$.
   (a) Caractériser sur (C) les triplets appartenant à une chaîne, indépendamment de la valeur du côté, par une condition liant q_1, q_2, q_3 . Établir une seconde condition correspondant à la valeur du côté. En déduire que l'abscisse du centre de gravité du triangle $M_1M_2M_3$ ne dépend que de c et exprimer cette abscisse.
   (b) À une chaîne reliant (C) et (C'), on associe les points P_i définis par les égalités
   $$\overrightarrow{M'_iP_i} = \overrightarrow{M'_iM_j} + \overrightarrow{M'_iM_k}$$
   Démontrer que P_1 , P_2 , P_3 appartiennent à une droite perpendiculaire à (AA') et dont on calculera l'abscisse en fonction de c. Faire le lien avec la partie III et compléter l'étude de la situation définie par la condition (1).
4. Les cercles (C) et (C') , lorsque $R' \neq R$, n'admettent entre eux de chaîne de côté c que si c, d , R , R' satisfont à la condition - dont on ne demande pas la démonstration- :
$$\frac{(c^2 - R^2)(d^2 - R^2)}{R} \pm \frac{(c^2 - R'^2)(d^2 - R'^2)}{R'} = 0 \tag{2}$$
5. (a) Réaliser la figure d'une chaîne en conformité avec (2) .
   (b) Etablir que dans une chaîne on a les égalités (modulo 2π) :
   $$(\overrightarrow{AM_i}, \overrightarrow{A'M_i}) - 2(\overrightarrow{A'M_i}, \overrightarrow{AM'_i}) = 0 \text{ ou } \pi$$
   Le choix de 0 ou π ne dépend pas de i. Par une construction ou un calcul, placer M'_i connaissant M_1.
   (c) La relation (1) de la partie III se déduit-elle de (2) ?