Les parties **I**, **II** *et* **III** *sont indépendantes. A l'exception de la dernière question, la partie* **IV** *ne dépend que de* **III**; *la dernière question de* **IV** *ne dépend en plus que de la dernière question de* **I** *ou* **II**.

I

1° Soit α un réel strictement positif; soient m et n deux entiers strictement positifs, tels que $n\alpha = m\pi$. On pose $\chi = 2\cos\alpha$ et $d_k = e^{ik\alpha}$ si $k \in \mathbb{Z}$. Montrer que $\chi d_k = d_{k-1} + d_{k+1}$.

2° On note V le vecteur de $\mathbb{C}^n$ de composantes $d_1, \ldots, d_n$. Montrer qu'il existe une matrice $A = (a_{ij})$ d'ordre n vérifiant :

a) $a_{ii} = \chi$ si $1 \leqslant i \leqslant n$;

b) $a_{ij} \in \mathbb{N}$ si $1 \leqslant i, j \leqslant n, i \neq j$;

c) $AV = 0$.

3° Montrer que $\det A = 0$.

4° En déduire qu'il existe un polynôme Q de degré n,

$$Q(X) = X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i,$$

où les a_i sont des entiers relatifs, tel que $Q(2\cos\alpha) = 0$.

5° Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $S(X) = X^p + \sum_{i=0}^{p-1} b_i X^i$, où les b_i sont des entiers relatifs, tels que $S(2/3) = 0$.

6° En déduire que si $\beta = \text{Arccos}\,(1/3) = 1{,}230\,959\ldots$, alors β/π est irrationnel.

II

1° Soit $A = \{a + bi\sqrt{2}\ \underline{tq}\ a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

2° Soit $I = \{x(1 + i\sqrt{2})\ \underline{tq}\ x \in A\}$; c'est un idéal de A. Montrer que, si $x \in A$, il existe $y \in I$ tel que $x - y \in \mathbb{Z}$.

3° Montrer que, si $x \in A$, il existe $y \in I$ tel que $x - y \in \{0, 1, 2\}$.

4° Montrer que l'anneau quotient A/I est isomorphe au corps à trois éléments $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

5° Montrer qu'il n'existe pas d'entier $n \neq 0$ tel que $(1 + 2i\sqrt{2})^n = 3^n$.

6° En déduire que si $\beta = \text{Arccos}\,(1/3) = 1{,}230\,959\ldots$, alors β/π est irrationnel.

III

On sait que $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{Q}$. Dans ce problème, un $\underline{\mathbb{Q}\text{-espace}}$ est un sous-$\mathbb{Q}$-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{R}$.

1° Montrer que $V = \{a + b\pi\ \underline{tq}\ a, b \in \mathbb{Q}\}$ est un $\mathbb{Q}$-espace de dimension 2 (on admettra que π est irrationnel).

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des suites finies $S = (s_1, \ldots, s_m)$ où $m \in \mathbb{N}$ et où $s_i = (l_i, \alpha_i) \in \mathbb{R}^2$ si $1 \leqslant i \leqslant m$. En particulier, c'est le cas où $m = 0$, la suite vide $S_\varnothing = (\,)$ est un élément de $\mathcal{S}$.

On définit la relation $\mathcal{R}$ dans l'ensemble $\mathcal{S}$ comme suit : deux suites $S = (s_1, \ldots, s_m)$, $S' = (s'_1, \ldots, s'_n) \in \mathcal{S}$ $\underline{\text{vérifient } S\mathcal{R}S'}$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

a) $m = 2$, $n = 1$, $S = ((l_1, \alpha), (l_2, \alpha))$, $S' = ((l_1 + l_2, \alpha))$;

b) $m = 2$, $n = 1$, $S = ((l, \alpha_1), (l, \alpha_2))$, $S' = ((l, \alpha_1 + \alpha_2))$;

c) $m = 1$, $n = 1$, $S = ((kl, \alpha))$, $S' = ((l, k\alpha))$ pour un $k \in \mathbb{Z}$;

d) $m = 1$, $n = 1$, $S = ((l, \alpha))$, $S' = ((l, \alpha + k\pi))$ pour un $k \in \mathbb{Z}$;

e) $m = 1$, $n = 0$, $S = ((0, \alpha))$ ou bien $S = ((l, 0))$, et $S' = S_\varnothing$.

Si V_1 et V_2 sont deux $\mathbb{Q}$-espaces, et si $S = ((l_1, \alpha_1), \ldots, (l_m, \alpha_m)) \in \mathcal{S}$, on dit que V_1 et V_2 enveloppent S si $l_1, \ldots, l_m \in V_1$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in V_2$, $\pi \in V_2$.

Si V_1 et V_2 sont deux $\mathbb{Q}$-espaces, et si $\pi \in V_2$, une $\mathbb{Q}\pi$-forme μ sur $V_1 \times V_2$ est une forme $\mathbb{Q}$-bilinéaire $\mu : V_1 \times V_2 \to \mathbb{Q}$ telle que $\mu(x, y) = 0$ si $y = \pi$.

Si V_1 et V_2 sont deux $\mathbb{Q}$-espaces enveloppant $S = ((l_1, \alpha_1), \ldots, (l_m, \alpha_m))$, et si $\mu : V_1 \times V_2 \to \mathbb{Q}$ est une $\mathbb{Q}\pi$-forme, on pose

$$\mu(S) = \sum_{i=1}^{m} \mu(l_i, \alpha_i).$$

En particulier $\mu(S_\varnothing) = 0$.

2° Montrer que si $S, S' \in \mathcal{S}$ vérifient $S\bar{R}S'$, si V_1 et V_2 enveloppent S et S', et si $\mu : V_1 \times V_2 \to \mathbb{Q}$ est une $\mathbb{Q}\pi$-forme, alors $\mu(S) = \mu(S')$.

Si $S = (s_1, \ldots, s_m)$, $S' = (s'_1, \ldots, s'_n)$ sont éléments de $\mathcal{S}$, on note

$$S \# S' = (s_1, \ldots, s_m, s'_1, \ldots, s'_n).$$

On définit la relation R dans l'ensemble $\mathcal{S}$ comme suit : deux suites $S = (s_1, \ldots, s_m)$, $S' = (s'_1, \ldots, s'_n)$ vérifient SRS' si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

f) $m = n$ et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, m\}$ telle que $s'_i = s_{\sigma(i)}$;

g) $S = T \# U$, $S' = T' \# U$, et $T\bar{R}T'$ (noter que U peut être la suite vide).

Enfin on dit que $S, S' \in \mathcal{S}$ sont R-équivalentes s'il existe une suite finie $S_0, S_1, \ldots, S_n$ d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que $S = S_0$, $S_n = S'$, et, si $1 \leqslant i \leqslant n$, $S_{i-1}RS_i$ ou S_iRS_{i-1}.

3° Soit $l \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha/\pi \in \mathbb{Q}$; montrer que $S = ((l, \alpha))$ et $S_\varnothing$ sont R-équivalentes.

4° On suppose que :

a) $S_0, S_1, \ldots, S_n$ est une suite d'éléments de $\mathcal{S}$ telle que, si $1 \leqslant i \leqslant n$, $S_{i-1}RS_i$ ou S_iRS_{i-1};

b) V_1 et V_2 sont des $\mathbb{Q}$-espaces enveloppant $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$;

c) $\mu : V_1 \times V_2 \to \mathbb{Q}$ est une $\mathbb{Q}\pi$-forme.

Montrer que $\mu(S_0) = \mu(S_n)$.

5° En déduire que si $S, S' \in \mathcal{S}$ sont R-équivalentes, il existe des $\mathbb{Q}$-espaces V_1 et V_2 enveloppant S et S' et tels que pour toute $\mathbb{Q}\pi$-forme $\mu : V_1 \times V_2 \to \mathbb{Q}$, on ait $\mu(S) = \mu(S')$.

6° On suppose que V_1 et V_2 sont deux $\mathbb{Q}$-espaces vérifiant :

a) $V_1 \neq \{0\}$;

b) $\pi \in V_2$;

c) il existe $\beta \in V_2$ tel que β/π est irrationnel.

Montrer que pour tout $l \in V_1 - \{0\}$, il existe une $\mathbb{Q}\pi$-forme $\mu : V_1 \times V_2 \to \mathbb{Q}$ telle que $\mu(l, \beta) \neq 0$.

7° En déduire que si l est un réel non nul et β un réel tel que β/π est irrationnel, alors les suites $S = ((l, \beta))$ et $S_\varnothing$ ne sont pas R-équivalentes.

IV

On considère l'espace $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne habituelle; une forme affine est une application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe une forme $\mathbb{R}$-linéaire non nulle $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = \varphi(x) + a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^3$. Si f est une forme affine, on note $D(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } f(x) \geqslant 0\}$; c'est un « demi-espace fermé ».

Un polyèdre A est un compact de $\mathbb{R}^3$ tel qu'il existe des formes affines $f_1, \ldots, f_k$ vérifiant :

a) $A = \bigcap_{i=1}^{k} D(f_i)$;

b) Il existe $x \in A$ tel que, si $1 \leqslant i \leqslant k$, $f_i(x) > 0$.

1° Montrer que le cube $C = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } 0 \leqslant a,\ b,\ c \leqslant 1\}$ est un polyèdre.

La suite de l'énoncé utilise la notion de face et d'arête d'un polyèdre; on se contentera des notions intuitives; par exemple le cube C a six faces et douze arêtes : chaque face est un carré de côté 1, chaque arête un segment de longueur 1; en général chaque face d'un polyèdre est un polygone plan dont les côtés sont des arêtes. Chaque arête d'un polyèdre a une longueur et un angle dièdre; cet angle est l'angle entre les deux faces adjacentes à cette arête; par exemple chacune des douze arêtes du cube C a une longueur égale à 1 et un angle dièdre de $\pi/2$. En général un angle dièdre est un élément de $]0, \pi[$.

2° On suppose que D est un tétraèdre régulier; autrement dit D est un polyèdre ayant quatre faces et six arêtes de même longueur; chaque face est un triangle équilatéral; on suppose de plus que D est de volume 1. Calculer la longueur l et l'angle dièdre β communs aux six arêtes de D.

Si A est un polyèdre, on note S(A) un élément de $\mathscr{S}$ (voir **III**) obtenu comme suit : $S(A) = ((l_1, \alpha_1), \ldots, (l_m, \alpha_m))$ où (l_i, α_i) sont la longueur et l'angle dièdre de la $i^{\text{ième}}$ arête de A, si A a m arêtes ordonnées de façon quelconque.

3° Montrer que S(C) et $S_\varnothing$ sont R-équivalentes.

4° Soit f_0 la forme affine $f_0(a, b, c) = a - 2c$. Montrer que $S(C \cap D(f_0)) \# S(C \cap D(-f_0))$ et S(C) sont R-équivalentes.

5° Plus généralement, soit A un polyèdre et f une forme affine tels que $A \cap D(f)$ et $A \cap D(-f)$ soient des polyèdres; montrer que S(A) et $S(A \cap D(f)) \# S(A \cap D(-f))$ sont R-équivalentes.

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des suites finies $P = (A_1, \ldots, A_m)$ de polyèdres; si $P = (A_1, \ldots, A_m) \in \mathscr{P}$, on note $S(P) = S(A_1) \# S(A_2) \# \ldots \# S(A_m)$.

Deux suites $P = (A_1, \ldots, A_m)$, $P' = (A'_1, \ldots, A'_n) \in \mathscr{P}$ vérifient $P\check{Z}P'$ si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

a) $m = 1$, $n = 1$, et il existe une isométrie Δ de $\mathbb{R}^3$ telle que $\Delta(A_1) = A'_1$;

b) $m = 2$, $n = 1$, et il existe une forme affine f telle que $A_1 = A'_1 \cap D(f)$, $A_2 = A'_1 \cap D(-f)$.

Deux suites $P = (A_1, \ldots, A_m)$, $P' = (A'_1, \ldots, A'_n) \in \mathscr{P}$ vérifient PZP' si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

c) $m = n$ et il existe une permutation σ de $\{1, \ldots, m\}$ telle que $A'_i = A_{\sigma(i)}$;

d) $P = T \# U$, $P' = T' \# U$ (notation analogue à celle définie après **III. — 2°**), et $T\check{Z}T'$.

Enfin on dit que P, $P' \in \mathscr{P}$ sont Z-équivalentes s'il existe une suite finie $P_0, P_1, \ldots, P_n$ d'éléments de $\mathscr{P}$ telle que $P = P_0$, $P_n = P'$, et, si $1 \leqslant i \leqslant n$, $P_{i-1}ZP_i$ ou P_iZP_{i-1}.

6° Montrer que si P, $P' \in \mathscr{P}$ sont Z-équivalentes, alors S(P) et S(P′) sont R-équivalentes.

7° Déduire de **I. — 6°** ou **II. — 6°**, **III. — 7°** et **IV. — 6°** que (C) et (D) ne sont pas Z-équivalentes. Comment peut-on interpréter géométriquement ce résultat ?