C. A. P. E. S.

Première composition de mathématiques.

Dans tout le problème, x désigne une variable réelle; k, n et p des entiers naturels; e désigne la base des logarithmes népériens. Toutes les fonctions intervenant dans le problème sont des fonctions numériques d'une variable réelle. Si une telle fonction f est pourvue de dérivées successives, les deux premières sont notées respectivement f' et f'', la dérivée d'ordre k est notée $f^{(k)}$ lorsque k est au moins égal à 3. De plus, si, et seulement si, cette dernière dérivée est continue sur un intervalle $[a, b]$, la fonction f est dite « k fois continûment dérivable sur $[a, b]$ ». La borne supérieure des nombres $|f^{(k)}(x)|$ lorsque x décrit $[a, b]$ est notée, lorsqu'elle existe,

$$\sup_{x \in [a, b]} |f^{(k)}(x)|.$$

Si $n \geqslant 1$, on note $n!$ le produit des entiers j tels que $1 \leqslant j \leqslant n$. Par convention $0! = 1$.

PREMIÈRE PARTIE. — On définit la fonction numérique g de la variable réelle x par les relations

$$g(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad \text{pour tout réel } x \text{ non nul.}$$

1° La fonction g est-elle continue au point $x = 0$, dérivable en ce point? Le cas échéant, calculer $g'(0)$, dérivée de g au point $x = 0$.

2° Étudier les variations de g (on pourra étudier la fonction auxiliaire z définie par $z(x) = e^x - 1 - xe^x$).

Faire une construction sommaire de la représentation graphique (Γ) de g, dans un repère orthonormé. On étudiera les branches infinies de (Γ).

3° *a*) Démontrer que la fonction h définie, pour tout réel x, par

$$h(x) = g(x) + \frac{x}{2}$$

admet à tout ordre n un développement limité au voisinage de $x = 0$, dont la partie régulière a la forme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$.

b) Calculer le développement limité à l'ordre 5 de h au voisinage de $x = 0$. Que peut-on dire des coefficients a_1, a_3 et a_5?

c) La propriété trouvée ci-dessus est-elle généralisable à tous les coefficients de la forme a_{2k+1}?

4° Démontrer que les coefficients a_k vérifient, quel que soit l'entier n au moins égal à 2, la relation

$$n!\left[\frac{a_n}{1!}+\frac{a_{n-1}}{2!}+\cdots+\frac{a_2}{(n-1)!}\right]-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+1}=0.$$

Vérifier l'exactitude des valeurs trouvées précédemment pour a_2 et a_4.

Deuxième partie. — Les nombres réels a_k sont les coefficients introduits dans la première partie, en 3° et 4°.

1° *a*) Soit f une fonction cinq fois dérivable sur $[0, 1]$. On pose

$$u(x)=f(x)-f(0)-\frac{x}{2}[f'(x)+f'(0)]+a_2x^2[f''(x)-f''(0)]+a_4\mathrm{A}x^5,$$

où A est une constante réelle.

Prouver qu'on peut choisir la valeur de A de sorte que $u(1)=0$. Cette condition étant réalisée, démontrer, en étudiant les dérivées successives de u, qu'il existe au moins un réel c, appartenant à l'intervalle $]0, 1[$, tel que $\mathrm{A}=f^{(5)}(c)$.

b) Si la fonction f est quatre fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, démontrer que l'on peut écrire

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(1)]-a_2[f'(1)-f'(0)]-a_4\mathrm{R},$$

où R est un nombre réel tel que

$$|\mathrm{R}|\leqslant \sup_{x\in[0,\,1]}|f^{(4)}(x)|.$$

De même, n étant un entier quelconque au moins égal à 2, démontrer que, si la fonction f est quatre fois continûment dérivable sur $[0, n]$, on a

$$\int_0^n f(x)\,dx=\frac{1}{2}[f(0)+f(n)]+\sum_{k=1}^{n-1}f(k)-a_2[f'(n)-f'(0)]-na_4\mathrm{S},$$

avec

$$|\mathrm{S}|\leqslant \sup_{x\in[0,\,n]}|f^{(4)}(x)|$$

[on pourra introduire les fonctions qui à tout réel x de l'intervalle $[0, 1]$ associent respectivement $f(x)$, $f(x+1)$, ..., $f(x+n-1)$].

Enfin, n étant toujours supposé au moins égal à 2, démontrer que, si la fonction f est quatre fois continûment dérivable sur $[a, b]$, on a

$$(1) \quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] - a_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 [f'(b) - f'(a)] - a_4 \frac{(b-a)^5}{n^4}\mathrm{T},$$

avec $$|\mathrm{T}| \leqslant \sup_{x\in[a,\,b]} |f^{(4)}(x)|.$$

2° On décide d'utiliser la formule (1) pour le calcul numérique approché de l'intégrale $\mathrm{I} = \int_a^b f(x)\,dx$. On adopte pour valeur approchée de I le réel

$$\mathrm{I}_1 = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] - a_2\left(\frac{b-a}{n}\right)^2 [f'(b) - f'(a)].$$

a) On pose $a = 0$, $b = 1$, $n = 5$ et $f(x) = e^{-x^2}$.

Donner numériquement un majorant aussi petit que possible de $|\mathrm{I} - \mathrm{I}_1|$, obtenu à partir de l'inégalité adjointe à la formule (1).

b) Calculer I_1 avec une précision de 10^{-4}, ou, si possible, 10^{-5}. On indiquera les caractéristiques de la table utilisée : table de logarithmes décimaux, ou table d'exponentielles naturelles, et dans les deux cas le nombre de décimales figurant sur la table. Indiquer la précision de la valeur approchée de I ainsi obtenue.

3° On peut également prendre pour valeur approchée de I le réel

$$\mathrm{I}_2 = \frac{b-a}{n}\left[\frac{1}{2}[f(a)+f(b)] + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right],$$

dont le calcul est plus simple que celui de I_1. On admettra que l'on a

$$(2) \qquad |\mathrm{I} - \mathrm{I}_2| \leqslant \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,\,b]} |f''(x)|.$$

a) Avec les mêmes hypothèses qu'en 2°, *a*) de la deuxième partie, donner numériquement un majorant aussi petit que possible de $|\mathrm{I} - \mathrm{I}_2|$, obtenu à partir de la formule (2).

b) En conservant les hypothèses $a = 0$, $b = 1$ et $f(x) = e^{-x^2}$, quelle valeur faudrait-il donner à l'entier n dans l'expression de I_2 pour être assuré que le nombre $|I - I_2|$ est au plus égal à 3.10^{-5}?

Comparer l'intérêt des valeurs approchées I_1 et I_2.

Troisième partie. — Le nombre n étant un entier naturel au moins égal à 1, on appelle E_n l'espace vectoriel réel engendré par les polynômes qui à la variable réelle x associent respectivement 1, x, ..., x^n. Dans cette partie, par convention, $x^0 = 1$ pour tout réel x. A tout polynôme P de E_n, on fait correspondre, par l'application φ, le polynôme Q défini par

$$Q(x) = P(x + 1) - P(x).$$

1° Démontrer que φ est une application linéaire de E_n dans lui-même.

Trouver le noyau de φ et l'image par φ de E_n.

2° Soit R un polynôme nul ou de degré au plus égal à $n - 1$. Démontrer qu'il existe un, et un seul, polynôme P appartenant à E_n, tel que l'on ait simultanément

$$\begin{cases} \varphi(P) = R, \\ \displaystyle\int_0^1 P(x)\,dx = 0. \end{cases}$$

3° On note P_n le polynôme répondant à la question précédente lorsque $R(x) = nx^{n-1}$.

a) Calculer $P_1(x)$ et $P_2(x)$. Trouver une relation entre P'_n (polynôme dérivé de P_n) et P_{n-1}. Démontrer que l'on a, pour toute valeur du réel x,

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(1 - x).$$

b) Calculer les coefficients de x^n et x^{n-1} dans $P_n(x)$. Soit $\alpha_{n,k}$ le coefficient de x^{n-k} dans $P_n(x)$, lorsque k est au moins égal à 2. Étant donné un tel entier k, démontrer que

$$\beta_k = \frac{(n-k)!}{n!}\alpha_{n,k}$$

est indépendant de l'entier n, supposé au moins égal à k. Démontrer que les nombres β_k sont égaux, pour $k \geqslant 2$, aux coefficients a_k introduits dans la première partie. Donner l'expression de $P_n(x)$ en fonction des a_k.

4° Les notations restent celles de la troisième partie, 3°.

a) En fonction des coefficients a_k, exprimer $P_{2n}(0)$, $P_{2n}(1)$, $P_{2n+1}(0)$ et $P_{2n+1}(1)$.

b) f étant une fonction $(2n+1)$ fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, établir la relation

$$(3)\quad \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{r} a_{2k}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] - \frac{1}{(2r+1)!}\int_0^1 f^{(2r+1)}(t)\mathrm{P}_{2r+1}(t)\,dt,$$

pour tout entier r tel que $1 \leqslant r \leqslant n$.

c) Étudier les variations de $\mathrm{P}_1(x)$ et $\mathrm{P}_2(x) - \mathrm{P}_2(0)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

Prouver, par récurrence sur l'entier n $(n \geqslant 1)$, que

$$\begin{cases} \mathrm{P}_{2n-1}(x) \text{ ne s'annule sur }]0, 1[\text{ que pour } x = \dfrac{1}{2}, \\ \mathrm{P}_{2n}(x) - \mathrm{P}_{2n}(0) \text{ ne s'annule pas sur }]0, 1[. \end{cases}$$

d) En déduire que, si f est une fonction $(2n+2)$ fois continûment dérivable sur $[0, 1]$, il existe au moins un réel c, appartenant à $[0, 1]$, tel que

$$(4)\quad \int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}[f(0)+f(1)] - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}[f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)] - a_{2n+2}f^{(2n+2)}(c).$$

(On pourra, à cet effet, introduire les bornes de la fonction continue $f^{(2n+2)}$ sur $[0, 1]$.)

Comparer ce résultat à ceux qui ont été obtenus dans la deuxième partie, en 1°, *b*), et indiquer les généralisations et applications possibles de la formule (4).

Deuxième composition de mathématiques.

Dans tout le problème, E désigne l'espace vectoriel $\mathbf{R}^2$ dont les éléments, appelés *vecteurs* (ou *points* selon les cas), sont les couples (x, y) de nombres réels $(x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R})$. Au besoin, on notera $\vec{\mathrm{V}} = (x, y)$ un vecteur quelconque et respectivement $\vec{0}$, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ les vecteurs $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Rappelons que, par définition, une *norme* N sur E est une application N de E dans $\mathbf{R}^+$, ensemble des réels positifs ou nul, satisfaisant aux trois conditions (*a*), (*b*), (*c*) suivantes :

(*a*) $$\mathrm{N}(\vec{\mathrm{V}}) = 0 \Longleftrightarrow \vec{\mathrm{V}} = \vec{0};$$