Université d'Orléans **Licence semestre 2**

Unité L1MT03

Structures mathématiques

Examen partiel du 30 juin 2005

durée: 2h

Les documents sont interdits. Les calculatrices sont autorisées.

1. Question de cours: montrer que le produit de deux entiers naturels non nuls est égal au produit de leur PPCM et de leur PGCD.

2. Trouver tous les couples (a, b) tels que le nombre qui s'écrit 111 en base a s'écrive 11 en base b et tels que a et b ne dépassent pas 50 (cinquante).

3. Déterminer N entier tel que $1 < N < 400$ et tel que pour tout entier i vérifiant $1 < i < 11$, on ait $i \wedge N \neq 1$.

4. On rappelle la formule suivante, qui a été démontrée en travaux dirigés: pour tout entier naturel non nul n, le nombre de diviseurs $d(n)$ du nombre n vaut
$$d(n) = \prod_{p\in\mathcal{P};\nu_p(n)>0} (1 + \nu_p(n)).$$
   (a) Soit n entier naturel non nul. Montrer l'équivalence
$$(d(n) \equiv 1\ [2]) \iff (\exists a \in \mathbb{N}^* \quad a = n^2).$$
   (b) Montrer
$$(\exists a \in \mathbb{N}^* \quad a = n^3) \Longrightarrow (d(n) \equiv 1\ [3]).$$
   (c) Réciproquement, a-t-on
$$(d(n) \equiv 1\ [3]) \Longrightarrow (\exists a \in \mathbb{N}^* \quad a = n^3)\ ?$$

5. (a) Soient a, a', b, b' des entiers naturels. On suppose de plus que $a \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Montrer que si $a \equiv a'$ [7] et $b \equiv b'$ [6], alors $a^b \equiv a'^{b'}$ [7].

(b) Pour tout $(a, b) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \times \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, déterminer la classe de a^b dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. On représentera les résultats sous forme d'un tableau et on écrira le résultat dans chaque case sous la forme $\mathring{k}$, avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(c) Montrer que si 7 divise $n^n + 2$, alors on a

- soit $n \equiv 3\ [7]$ et $n \equiv 5\ [6]$
- soit $n \equiv 5\ [7]$ et $n \equiv 1\ [6]$

(d) Résoudre les deux systèmes de congruence énoncés ci-dessus.

(e) Déterminer tous les nombres entiers n inférieurs à 100 tels que 7 divise $n^n + 2$.

FIN