Université d'Orléans **Licence semestre 2**

Unité L1MT03

Structures mathématiques

Examen du 27 mai 2005

durée: 2h

Les documents sont interdits. Les calculatrices sont autorisées.

1. Question de cours: énoncer et démontrer le théorème de structure des sous-groupes de $\mathbb{Z}$.

2. Pour x,y réels, on pose $x \star y = xy - x - y + 2$.

   (a) Montrer que $\star$ est une loi de composition interne associative sur $\mathbb{R}$.

   (b) Résoudre l'équation en u : $u \star 0 = 0$.

   (c) Montrer que $(\mathbb{R}, \star)$ est un monoïde.

3. (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $2^k \geq k + 1$.

   (b) Soit n un entier naturel non nul. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes:

$$n \text{ divise } 2^n \tag{1}$$

   et

$$\exists k \in \mathbb{N} \quad n = 2^k \tag{2}$$

4. Déterminer tous les couples d'entiers naturels dont le PGCD est 7 et le PPCM 70.

5. (a) Soient a, a', b, b' des entiers naturels. On suppose de plus que $a \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Montrer que si $a \equiv a'$ [5] et $b \equiv b'$ [4], alors $a^b \equiv a'^{b'}$ [5].

   (b) Pour tout $(a, b) \in \{1, 2, 3, 4\} \times \{0, 1, 2, 3\}$, déterminer la classe de a^b dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. On représentera les résultats sous forme d'un tableau et on écrira le résultat dans chaque case sous la forme $\mathring{k}$, avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

   (c) Montrer que si 5 divise $n^n + 3$, alors on a

- soit $n \equiv 2$ [5] et $n \equiv 1$ [4]
- soit $n \equiv 3$ [5] et $n \equiv 3$ [4]

(d) Résoudre les deux systèmes de congruence énoncés ci-dessus.

(e) Rappeler la liste des nombres premiers inférieurs à 100.

(f) Déterminer tous les nombres premiers p inférieurs à 100 tels que 5 divise $p^p + 3$.

FIN