Université d'Orléans **Licence semestre 2**

Unité L1MT03

Structures mathématiques

Examen partiel du 23 mars 2005

durée: 2h

Les documents et les calculatrices sont interdits.

1. Pour x,y entiers naturels, on pose $x \star y = xy + x + y$. Montrer que $(\mathbb{N}, \star)$ est un monoïde.
2. En quelle(s) base(s) le nombre qui s'écrit 371 en base dix s'écrit-il 173 ?
3. Quelle est le nombre de chiffres de l'écriture de 10^6 (un million) en base 16 ? (On pourra remarquer que $2^2 = 4 < 5$ et $5^3 = 125 < 128 = 2^7$)
4. Soit $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Montrer $\phi^2 = 1 + \phi$. On note
$$\mathbb{Z}[\phi] = \{a + \phi b; (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}.$$
Montrer que $(\mathbb{Z}[\phi], +, \times)$ est un anneau unitaire (on admettra que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un anneau).
5. On appelle isométrie du plan $\mathcal{P}$ toute application de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ telle que
$$\forall (x, y) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P} \quad d(\phi(x), \phi(y)) = d(x, y),$$
où $d(x, y)$ représente la distance usuelle entre x et y.
   (a) Montrer que toute isométrie est injective.
   (b) On note I l'ensemble des isométries du plan. Montrer que $(I, \circ)$ est un monoïde. Dans la suite de l'exercice on admettra que $(I, \circ)$ est un groupe.
   (c) Soit $X \subset \mathcal{P}$ un ensemble fini. On note
$$I_X = \{\phi \in I; \phi(X) \subset X\}.$$
   Montrer que $(I_X, \circ)$ est un monoïde.
   (d) Montrer que $(I_X, \circ)$ est un sous-groupe de $(I, \circ)$.

FIN