Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Corrigé du devoir en temps libre

I Premières propriétés

1.
   - Soit τ un temps d'arrêt (au sens de la définition donnée par l'énoncé), et soit n un entier naturel non nul. On a
   $$\{\tau \le n\} = \cup_{k=1}^{n} \{\tau = k\}.$$
   Par définition d'un temps d'arrêt $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$ pour tout k entre 1 et n. Mais comme la suite des tribus $(\mathcal{F}_k)$ est croissante, on a pour tout k entre 1 et n $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n$, et donc $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_n$. Comme $\{\tau \le n\}$ s'écrit comme réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}_n$, il est dans $\mathcal{F}_n$.
   - Réciproquement, on peut écrire
   $$\{\tau = n\} = \{\tau \le n\} \backslash \{\tau \le n-1\} = \{\tau \le n\} \cap \{\tau \le n-1\}^c.$$
   Ainsi, si pour tout entier $k \ge 1$, on a $\{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$, alors $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{\tau \le n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n$. Alors, comme toute tribu est stable par complémentation et par intersection finie, $\{\tau = n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$.
   - On vient de voir que pour un temps d'arrêt τ, on a pour tout n: $\{\tau \le n\} \in \mathcal{F}_n$. Comme τ est à valeurs entières, l'événement $\{\tau \ge n+1\}$ est le complémentaire de l'événement $\{\tau \le n\}$ et est donc également dans $\mathcal{F}_n$.

2. Soit σ et τ deux temps d'arrêts, n un entier naturel non nul
   - $$\{\sigma \vee \tau \le n\} = \{\max(\sigma, \tau) \le n\} = \{\sigma \le n\} \cap \{\tau \le n\}$$
   Mais comme σ et τ sont des temps d'arrêts, les deux événements du membre de droite sont dans $\mathcal{F}_n$, donc leur intersection est dans la tribu $\mathcal{F}_n$. Comme n est quelconque, on peut donc dire que $\sigma \wedge \tau$ est un temps d'arrêt.
   - $$\{\sigma \wedge \tau \le n\} = \{\min(\sigma, \tau) \le n\} = \{\sigma \le n\} \cup \{\tau \le n\}$$
   Mais comme σ et τ sont des temps d'arrêts, les deux événements du membre de droite sont dans $\mathcal{F}_n$, donc leur réunion est dans la tribu $\mathcal{F}_n$. Comme n est quelconque, on peut donc dire que $\sigma \wedge \tau$ est un temps d'arrêt.

- Supposons maintenant que $\sigma \leq \tau$. Soit $A \in \mathcal{F}_\sigma$. Comme $\sigma \leq \tau$, on a $\{\tau \leq n\} \cap A = (A \cap \{\sigma \leq n\}) \cap \{\tau \leq n\}$. Comme $A \in \mathcal{F}_\sigma$, $A \cap \{\sigma \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. D'après la caractérisation des temps d'arrêt, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. On en déduit que $\{\tau \leq n\} \cap A \in \mathcal{F}_n$. Comme n est quelconque, $A \in \mathcal{F}_\tau$.

3. Dire que “ X restreinte à $\{\tau = n\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$“, c'est dire que la restriction de X à la partie de Ω: $\{\tau = n\}$ est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Notons X' la restriction de X à $\{\tau = n\}$. Dire que X' est une application mesurable de $(\Omega, \mathcal{F}_n)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, c'est dire que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$: $X'^{-1}(B) \in \mathcal{F}_n$. Mais $X'^{-1}(B) = X^{-1}(B) \cap \{\tau = n\}$. Donc dire que “ X restreinte à $\{\tau = n\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$“, c'est dire que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

   - Supposons donc que pour tout n et pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$.

     On va montrer que X est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. Pour cela, il suffit de voir que pour tout borélien B de $\mathbb{R}$, $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$. Soit $n \geq 1$: d'après le raisonnement préliminaire $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Comme celà vaut pour tout n, $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$ par définition de $\mathcal{F}_\tau$, ce qui achève la preuve.
   - Réciproquement, supposons que X est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable. Soit $n \geq 1$ et B un borélien de $\mathbb{R}$. Comme X est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable $\{X \in B\} \in \mathcal{F}_\tau$. Par définition de $\mathcal{F}_\tau$, cela implique que $\{X \in B\} \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$, ce qui achève la preuve.

4. La restriction de X_τ à $\{\tau = n\}$ coincide avec X_n sur l'ensemble $\{\tau = n\}$. Soit B un borélien de $\mathbb{R}$: l'image réciproque de B par la restriction de X_τ à $\{\tau = n\}$ est donc $X_n^{-1}(B) \cap \{\tau = n\} = \{X_n \in B\} \cap \{\tau = n\}$. Comme X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable, $\{X_n \in B\} \in \mathcal{F}_n$. Comme τ est un temps d'arrêt $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Finalement, $X_n^{-1}(B) \cap \{\tau = n\}$ est dans $\mathcal{F}_n$, ce qui signifie que la restriction de X_τ à $\{\tau = n\}$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. D'après la question précédente, celà signifie que X_τ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable.

5. Soit Ψ la variable aléatoire définie par

$$\Psi = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1\!\!1_{\{\tau = n\}}.$$

   Par définition, Ψ coincide avec $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ sur l'ensemble $\{\tau = n\}$. Pour résoudre la question posée, il suffit donc de montrer que $\Psi = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau] 1\!\!1_{\{\tau = n\}\}}$.

   Avant celà, on peut remarquer que l'événement $A = \{\tau = n\}$ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable: en effet pour $k \neq n$, on a $A \cap \{\tau = k\} = \varnothing \in \mathcal{F}_k$, tandis que pour $k = n$, on a $A \cap \{\tau = k\} = \{\tau = k\} \in \mathcal{F}_k$. Ainsi $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau] 1\!\!1_{\{\tau = n\}} = \mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau = n\}} | \mathcal{F}_\tau]$, donc il suffit de montrer que

$$\Psi = \mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau = n\}} | \mathcal{F}_\tau].$$

- Montrons d'abord que Ψ est $\mathcal{F}_\tau$-mesurable: D'après la question 3), il s'agit de montrer que pour tout k, Ψ restreinte à $\{\tau = k\}$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable. Mais Ψ restreinte à $\{\tau = n\}$ vaut $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]1\!\!1_{\tau=n}$, qui est évidemment $\mathcal{F}_n$-mesurable, comme produit de deux variables $\mathcal{F}_n$-mesurable (conséquences immédiates respectivement de la définition de l'espérance conditionnelle et d'un temps d'arrêt). D'un autre côté, Ψ restreinte à $\{\tau = k\}$ est, lorsque $k \neq n$, la fonction constamment nulle, qui est évidemment $\mathcal{F}_k$-mesurable. Ainsi, Ψ est bien $\mathcal{F}_\tau$-mesurable
- Ψ est intégrable, car c'est le produit de $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ qui est intégrable, et de $1\!\!1_{\tau=n}$, qui est bornée.
- Reste à montrer que pour tout événement A $\mathcal{F}_\tau$-mesurable, on a $\mathbb{E}[\Psi 1\!\!1_A] = \mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A]$. Or

  $$\mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A] = \mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}\cap A}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1\!\!1_{\{\tau=n\}\cap A}],$$

  où la dernière égalité provient du fait que $\{\tau = n\} \cap A$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable (car $A \in \mathcal{F}_\tau$), ce qui donne finalement

  $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1\!\!1_{\{\tau=n\}\cap A}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] 1\!\!1_{\{\tau=n\}} 1\!\!1_A] \\ &= \mathbb{E}[\Psi 1\!\!1_A]\end{aligned}$$

6. Soit $n \geq 1$. On a

   $$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=1}^{n} \{X_k \in A\}.$$

   Pour tout k $\{X_k \in A\} \in \mathcal{F}_\|$ car $(X_k)_{k\geq 1}$ est adaptée; or $\mathcal{F}_\| \subset \mathcal{F}_n$, donc $\{\tau \leq n\}$ est réunion finie d'éléments de $\mathcal{F}_n$ et est donc dans $\mathcal{F}_n$, ce qui prouve que τ est un temps d'arrêt.

   D'autre part la variable aléatoire constante N est un temps d'arrêt car pour tout n $\{N = n\} \in \{\varnothing, \Omega\} \subset \mathcal{F}_n$, ainsi d'après la question 2) $\tau = \sigma \wedge n$ est aussi un temps d'arrêt.

II Temps d'arrêt optimal pour une suite finie

1.
   - Évidemment $\{i \geq n : X_i = S_i\} \subset [n, +\infty[$, donc sa borne inférieure τ_n dépasse n. D'autre part, par définition $S_N = X_N$ donc $N \in \{i \geq n : X_i = S_i\}$, d'où $\tau_n \leq N$. On a donc bien $\tau_n \in T_N^n$.
   - Comme $S_n = \max(X_n, \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n))$, on a $S_n \leq \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n))$, donc $(S_n)_{n\geq 1}$ est bien une surmartingale, elle est bien supérieure ou égale à X_n, toujours car $S_n = \max(X_n, \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n))$.
   - Comme X_n et $\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ sont $\mathcal{F}_n$-mesurables (respectivement grâce à l'adaptation de (X_n) et la définion de l'espérance conditionnelle), S_n l'est aussi. Ainsi $(S_n)_{n\geq 1}$ est une surmartingale adaptée à $(\mathcal{F}_n)_{1\leq n\leq N}$.

- Soit $(Y_n)_{1\le n\le N}$ une surmartingale supérieure ou égale à X_n. Montrons par récurrence décroissante sur n que $S_n \le Y_n$. Pour $n = N$, c'est acquis car $S_N = X_N \le Y_N$. Montrons que l'hypothèse au rang $n+1$ entraîne l'hypothèse au rang n: on a $Y_n \ge \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n)$ car $(Y_n)_{1\le n\le N}$ est une surmartingale. D'après l'hypothèse de récurrence $Y_{n+1} \ge S_{n+1}$, or l'espérance conditionnelle conserve l'ordre, donc $Y_n \ge \mathbb{E}(Y_{n+1}|\mathcal{F}_n) \ge \mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n)$. Mais par hypothèse $Y_n \ge X_n$, donc finalement $Y_n \ge \max(\mathbb{E}(S_{n+1}|\mathcal{F}_n), X_n) = S_n$.

2. Par construction, on a pour tout $k \in \{1, \dots, N\}$: $X_k \le S_k$. Par suite, pour tout temps d'arret $\sigma \in Tn_N$, on a $X_\sigma \le S_\sigma$. On a alors évidemment

$$\mathbb{E}[X_\sigma|\mathcal{F}_n] \le \mathbb{E}[S_\sigma|\mathcal{F}_n].$$

Il suffit donc alors de montrer que $E[S_\sigma|\mathcal{F}_n] \le S_n$. Mais comme $(S_n)_{1\le n\le N}$ est une surmartingale, que n et σ sont des temps d'arrêts bornés (par N), avec $n \le \sigma$, cette dernière inégalité découle immédiatement du théorème de Hunt.

3. Montrons par récurrence décroissante sur n que pour tout entier $n \in \{1, \dots, N\}$, on a

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n] = S_n.$$

Pour $n = N$, on a par définition de S_N: $X_N = S_N$, d'où par définition de τ_N: $\tau_N = N$. Ainsi $\mathbb{E}[X_{\tau_N}|\mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[X_N|\mathcal{F}_N] = X_N = S_N$, où la pénultième inégalité provient de l'adaptation de la suite. Supposons l'hypothèse réalisée au rang $n+1$ et voyons comment passer de $n+1$ un à n: si $X_n = S_n$, on a $\tau_n = n$, sinon on a $\tau_n = \tau_{n+1}$. Ainsi

$$X_{\tau_n} - X_{\tau_n+1} = (S_n - X_{\tau_n+1})1\!\!1_{\{X_n=S_n\}}$$

Conditionnons cette égalité par rapport à $\mathcal{F}_n$: comme S_n et X_n sont $\mathcal{F}_n$-mesurables, on a

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n] - \mathbb{E}[X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_n] = (S_n - \mathbb{E}[X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_n])1\!\!1_{\{X_n=xS_n\}}$$

Maintenant, en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}X_{\tau_n+1}|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] = S_n$$

d'où

$$\mathbb{E}[X_{\tau_n}|\mathcal{F}_n] - S_n = (S_n - S_n)1\!\!1_{\{X_n=S_n\}} = 0,$$

ce qui donne l'hypothèse au rang n.

Posons alors $\tau^* = \tau_1$. D'après la question 1) τ^* est bien dans T_N. D'après la première partie de la présente question, on a $\mathbb{E}[X_{\tau^*}|\mathcal{F}_1] = S_1$, d'où $\mathbb{E}[X_{\tau^*} = \mathbb{E}S_1$. Soit maintenant $\tau \in T_N = T_N^1$. D'après la question 2), on a $\mathbb{E}[X_\tau|\mathcal{F}_\infty] \le S_1$, d'où $\mathbb{E}X_\tau \le \mathbb{E}S_1$. Ceci montre bien que τ^* réalise bien le maximum des $\mathbb{E}(X_\tau)$ lorsque τ décrit T_N.

III Inégalité du prophète par seuillage

1. Soit i entre 1 et N: on a $X_k - m \leq (X_k - m)^+ \leq \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+$, soit $X_k \leq m + \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+$ On en déduit que
$$X_N^* = \sup_{1\leq k\leq N} X_k \leq m + \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+,$$
d'où en prenant l'espérance:
$$\mathbb{E}X_N^* \leq m + \beta.$$

2. Remarquons que si $X_n^* < c$, alors $\{n \leq N : X_n > c\} \neq \varnothing$ et donc il existe un plus petit entier n entre 1 et N tel que $X_n > c$ et cet entier est $\sigma(c)$: on a alors $X_{\sigma(c)} > c$. Inversement, si $X_{\sigma(c)} \leq c$, c'est donc que $\sigma(c) \notin \{n \leq N : X_n > c\}$, ce qui implique que $\{n \leq N : X_n > c\} \neq \varnothing$, et donc que $X_n^* \geq c$. Ainsi on a
$$\{X_{\sigma(c)}\} > c = \{X_N^* > c\}.$$
Alors
$$\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} = \mathbb{E}X_{\sigma(m)} \mathbb{1}_{\{X_{\sigma(c)}\}>c\}} = \mathbb{E}X_{\sigma(m)} \mathbb{1}_{\{X_N^*>c\}} = \mathbb{E}(X_{\sigma(m)} - m)\mathbb{1}_{\{X_N^*>m\}} + m\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X_N^*>m\}}$$
Mais lorsque $X_N^* > m$, alors on a
$$X_{\sigma(m)} - m = \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+ \mathbb{1}_{\{\sigma(m)>i-1\}}$$
En effet pour $i < \sigma(m)$, on a $X_i - m \leq 0$, donc $(X_i - m)^+ = 0$ tandis que pour $i > \sigma(m)$, on a $\mathbb{1}_{\{\sigma(m)>i-1\}} = 0$. Ne reste donc dans la somme que le terme pour $i = \sigma(m)$, et dans ce cas $(X_i - m)^+ \mathbb{1}_{\{\sigma(m)>i-1\}} = (X_{\sigma(m)} - m) \times 1$. Dans les cas $X_N^* > m$, on a donc
$$(X_{\sigma(m)} - m)\mathbb{1}_{X_N^*>m} = \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+ \mathbb{1}_{\{\sigma(m)>i-1\}}$$
L'identité demeure valable lorsque $X_N^* \leq m$: le même raisonnement que précédemment montre alors que les deux termes sont nuls. On obtient donc
$$\mathbb{E}(X_{\sigma(m)} - m)\mathbb{1}_{X_N^*>m} = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ \mathbb{1}_{\{\sigma(m)>i-1\}},$$
d'où finalement
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} &= m\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{X_N^*>m\}} + \mathbb{E}(X_{\sigma(m)} - m)\mathbb{1}_{\{X_N^*>m\}} \\
&= mP(X_N^* > m) + \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ \mathbb{1}_{\{\sigma(m)>i-1\}} \\
&= mp + \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ \mathbb{1}_{\{\sigma(m)>i-1\}}.
\end{aligned}$$

Il s'agit maintenant de minorer $\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}}$. Pour tout i entre 1 et N, l'événement $\{\sigma(m) > i-1\}$ est $\sigma(X_1, \ldots, X_{i-1})$-mesurable et est donc indépendant de X_i: on a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}} &= \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}} \\
&= \mathbb{E}(X_i - m)^+ P(\sigma(m) > i-1) \\
&\geq \mathbb{E}(X_i - m)^+ P(\sigma(m) > N-1).
\end{aligned}$$

Mais, comme on l'a vu précédemment $(X_N^* \leq m) \Longrightarrow (\sigma(m) = N)$, donc

$$\mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}} \geq \mathbb{E}(X_i - m)^+ P(X_N^* \leq m) = (1-p)\mathbb{E}(X_i - m)^+,$$

d'où en sommant sur i de 1 à N:

$$\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m)>i-1\}} \geq \sum_{i=1}^N (1-p)\mathbb{E}(X_i - m)^+ = (1-p)\beta,$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

De la même manière, on montre pour tout c:

$$\{X_{\tau(c)} \geq c\} = \{X_N^* \geq c\}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} &= \mathbb{E} X_{\tau(m)} 1\!\!1_{\{X_{\tau(c)}\}>c\}} \\
&= \mathbb{E} X_{\tau(m)} 1\!\!1_{\{X_N^* \geq m\}} \\
&= \mathbb{E}(X_{\tau(m)} - m) 1\!\!1_{\{X_N^* \geq m\}} + m\mathbb{E} 1\!\!1_{\{X_N^* \geq m\}} \\
&= \mathbb{E}(X_{\tau(m)} - m) 1\!\!1_{\{X_N^* \geq m\}} + m(1-q)
\end{aligned}$$

Alors, on montre

$$(X_{\tau(m)} - m) 1\!\!1_{\{X_N^* \geq m\}} = \sum_{i=1}^N (X_i - m)^+ 1\!\!1_{\tau(m)>i-1},$$

puis

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{\tau(m)} - m) 1\!\!1_{\{X_N^* \geq m\}} &= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\tau(m)>i-1} \\
&= \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ \mathbb{E} 1\!\!1_{\tau(m)>i-1} \\
&\geq (\sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+) \mathbb{E} 1\!\!1_{\tau(m)>N-1} \\
&\geq \beta P(\tau(m) > N-1) \\
&\geq \beta P(X_N^* < m) \\
&= \beta q
\end{aligned}$$

3. Comme les variables aléatoires (X_k) sont à valeurs positives, $X_{\tau(m)}$ et $X_{\sigma(m)}$ le sont aussi, d'où

$$\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} = \mathbb{E} X_{\sigma(m)} 1\!\!1_{\{X_{\sigma(m)} > m\}} \leq \mathbb{E} X_{\sigma(m)}$$

et

$$\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} = \mathbb{E} X_{\tau(m)} 1\!\!1_{\{X_{\tau(m)} \geq m\}} \leq \mathbb{E} X_{\tau(m)}.$$

   - Supposons $\beta \geq m$. En combinant les inégalités des questions 1 et 2, on a

     $$2\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} - \mathbb{E} X_N^* \geq 2(mp + \beta(1-p)) - (m+\beta) = (1-2p)(\beta - m) \geq 0,$$

     soit $\mathbb{E} X_N^* \leq 2\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)}$.
   - Supposons $\beta \leq m$. En combinant les inégalités des questions 1 et 2, on a

     $$2\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} - \mathbb{E} X_N^* \geq m(1-q) + \beta q - (m+\beta) = (1-2q)(m-\beta) \geq 0,$$

     soit $\mathbb{E} X_N^* \leq 2\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)}$.

4. Grâce à la question précédente, on a quelle que soit la position relative de β et m:

$$\mathbb{E} X_N^* \leq 2 \max(\mathbb{E} X_{\sigma(m)}, \mathbb{E} X_{\tau(m)}).$$

Les deux inégalités demandées résultent alors des inclusions $\{\sigma, \tau\} \subset T_N^s \subset T_N$.

5. Considérons la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k \in \{1,\dots,n\}}$ avec $X_1 = 1$, $X_2 = M 1\!\!1_{A_m}$ avec $P(A_m) = 1/M$ et $X_k = 0$ pour $k \geq 3$. On a pour tout $N \geq 2$: $X_N^* = \max(1, X_2)$. X_N^* vaut donc $\max(1, M)$ avec probabilité $1/M$, 1 avec probabilité $1 - 1/M$. D'où

$$\mathbb{E} X_N^* = 1 - \frac{1}{M} + \frac{\max(1, M)}{M}.$$

Pour $M \geq 1$, on a donc $\mathbb{E} X_N^* = 2 - \frac{1}{M}$.

Construisons par récurrence descendante la suite S_n définie dans la partie II: pour $k \in \{3, \dots, N\}$, on a $S_k = 0$, tandis que $S_2 = \max(X_2, \mathbb{E}(S_3 | \mathcal{F}_2) = \max(X_2, 0) = X_2$, et $S_1 = \max(X_1, \mathbb{E}(S_2 | \mathcal{F}_1) = \max(X_1, \mathbb{E}(X_2 | \mathcal{F}_1) = \max(X_1, \mathbb{E} X_2) = \max(1, 1) = 1$. Ainsi, d'après le résultat de la partie II, on a $\sup\{\mathbb{E} X_\tau; \tau \in T_N\} = 1$, d'où

$$\frac{\mathbb{E} X_N^*}{\sup\{\mathbb{E} X_\tau; \tau \in T_N\}} = 2 - \frac{1}{M}.$$

M pouvant être pris aussi grand que l'on veut, on voit donc que 2 ne peut être remplacé par une constante plus petite dans l'inégalité (2).

6. (a) Posons $M_N = \sup_{1 \le i \le N} X_i^{(n)}$. Cette borne supérieure est en fait un maximum; comme les X_i prennent leurs valeurs dans $\{0, 1, a\}$, M_N aussi. On a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}M_N &= aP(M_N = a) + 1P(M_N = 1) \\ &= a(P(M_N < 1) - P(M_N < a)) + 1 - P(M_N < 1) \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} P(M_n < 1) &= P(\cap_{i=1}^n \{X_i^{(N)} < 1\}) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i^{(N)} < 1) \\ &= (1 - \frac{b}{N})^N \end{aligned}$$

On utilise ici l'indépendance des X_i. De même

$$\begin{aligned} P(M_n < a) &= P(\cap_{i=1}^n \{X_i^{(N)} < a\}) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i^{(N)} < a) \\ &= (1 - \frac{b+c}{N})^N \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{E}M_N = a((1 - \frac{b}{N})^N - (1 - \frac{b+c}{N})^N) + 1 - (1 - \frac{b}{N})^N$$

Comme pour tout x réel, on a $\lim_{N \to +\infty} (1 - x/N)^n = e^{-x}$, on obtient $\lim_{N \to +\infty} \mathbb{E}M_N = a(e^{-b} - e^{-(b+c)}) + 1 - e^{-b}$.

(b) Pour $i \in \{1, \ldots, N-1\}$, en utilisant l'indépendance, on a

$$P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = a) = P(\tau(a) = i, X_i^{(N)} = a)(1 - b/N)^{i-1} \frac{c}{N},$$

tandis que

$$P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = 1) = P(\tau(a) = i, X_i^{(N)} = 1)(1 - b/N)^{i-1} \frac{b}{N},$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{\tau(a)}^{(N)} | \tau(a) < N] &= \frac{\sum_{i=1}^n aP(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = a) + P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = 1)}{\sum_{i=1}^n P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = a) + P(\tau(a) = i, X_{\tau(a)}^{(N)} = 1)} \\ &= \frac{a \times c/N + 1 \times b/N}{c/N + b/N} \\ &= \frac{ac + b}{c + b}. \end{aligned}$$

De même $\mathbb{E}[X_{\tau(a)}^{(N)}|\tau(a)<N]=\frac{ac+b}{N}$. Ainsi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_{\tau(a)}^{(N)} &= \frac{ac+b}{c+b}P(\tau(a)<N)+\frac{ac+b}{N}P(\tau(a)=N)\\ &= \frac{ac+b}{c+b}(1-P(\tau(a)=N)+\frac{ac+b}{N}P(\tau(a)=N).\end{aligned}$$

Mais

$$P(\tau(a)=N)=P(\forall i<N:X_i^{(N)}=0)=(1-\frac{b+c}{N})^{N-1}=\frac{1}{(1-\frac{b+c}{N})^{N-1}}(1-\frac{b+c}{N})^N$$

tend vers $e^{-(b+c)}$ lorsque N tend vers $+\infty$, d'où

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}X_{\tau(a)}^{(N)}=\frac{ac+b}{c+b}(1-e^{-(b+c)}).$$

L'autre identité est plus simple: il suffit de remarquer que

$$1\!\!1_{\tau(1)<N}\leq X_{\tau(1)}^{(N)}\leq 1\!\!1_{\tau(1)<N}+1\!\!1_{\tau(1)=N}1\!\!1_{X_N^N>0}\leq 1\!\!1_{\tau(1)<N}+1\!\!1_{X_N^N>0},$$

d'où

$$P(\tau(1)<N)\leq\mathbb{E}X_{\tau(1)}^{(N)}\leq P(\tau(1)<N)+\frac{b+c}{N},$$

ce qui entraîne

$$\lim_{N\to+\infty}\mathbb{E}X_{\tau(1)}^{(N)}=\lim_{N\to+\infty}P(\tau(1)<N)=\lim_{N\to+\infty}1-(1-b/N)^{N-1}=1-e^{-b}.$$

(c) Posons $f(x)=\frac{(1-e^{-(b+c)})(b+xc)}{b+c}$. f est une fonction affine strictement croissante, avec $f(0)=\frac{(1-e^{-(b+c)})b}{b+c}<1-e^{-(b+c)}$, car

$$1-e^{-(b+c)}-\frac{(1-e^{-(b+c)})b}{b+c}=b(\frac{1-e^{-b}}{b}-\frac{1-e^{-(b+c)}}{b+c})>0,$$

car la fonction $x\mapsto\frac{1-e^{-x}}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$ (c'est une conséquence de la convexité de la fonction exponentielle.) et $f(1)=1-e^{-(b+c)}$. Posons $a^*=f^{-1}(W(1))=\frac{(b+c)(1-e^{-b})-be^{-b}(1-e^{-c})}{c(1-e^{-(b+c)})}$. Comme $f(1)=1-e^{-(b+c)}>1-e^{-b}=W(1)>f(0)$, on a $0<a^*<1$. Par construction, on a $W(a^*)=W(1)$.

(d) Il s'agit de calculer $\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)}:\tau\in T_N^s\}$. Comme les $X_i^{(N)}$ sont à valeurs dans $\{0,a,1\}$, il est facile de voir que

- $\tau(0)=1$.
- Pour $c\in]0,a]$, on a $\tau(c)=\tau(a)$.
- Pour $c\in]a,1]$, on a $\tau(c)=\tau(1)$.
- Pour $c\in]1,+\infty[$, on a $\tau(c)=N$.

- Pour $c \in [0, a[$, on a $\sigma(c) = \tau(a)$.
- Pour $c \in [a, 1[$, on a $\sigma(c) = \tau(1)$.
- Pour $c \in [1, +\infty[$, on a $\sigma(c) = N$.

Ainsi

$$\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\} = \max(\mathbb{E}_N^{(N)}, \mathbb{E}_1^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(1)}^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(a)}^{(N)}).$$

Il est aisé de voir que $\mathbb{E}_N^{(N)} = \mathbb{E}_1^{(N)} = \frac{ac+b}{N}$. On a donc

$$\frac{\mathbb{E}M_N}{\max(\mathbb{E}_N^{(N)}, \mathbb{E}_1^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(1)}^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(a)}^{(N)})} = \frac{\mathbb{E}M_N}{\max(\frac{ac+b}{N}, \mathbb{E}_{\tau(1)}^{(N)}, \mathbb{E}_{\tau(a)}^{(N)})}.$$

D'où

$$\lim_{N \to +\infty} \frac{\mathbb{E}M_N}{\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\}} = \frac{1 - e^{-b} + a(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{\max(W(1), W(a))}.$$

Dans ce qui suit, on va choisir $a = a^*$: on a alors $W(1) = W(a) = 1 - e^{-b}$ et

$$\frac{1 - e^{-b} + a(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{\max(W(1), W(a))} = \frac{1 - e^{-b} + a^*(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{1 - e^{-b}} = 1 + \frac{a^*(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{1 - e^{-b}}.$$

Notons pour b, c positifs

$$R(b, c) = 1 + \frac{a^*(e^{-b} - e^{-(b+c)})}{1 - e^{-b}}.$$

Un simple développement limité permet de montrer que

$$\lim_{x \to 0} R(bx, cx) = 1 + \frac{b}{b+c}.$$

Soit $\epsilon > 0$. On peut trouver un entier n tel que $1 + \frac{n}{n+1} > 2 - \epsilon$. Comme $\lim_{x \to 0} R(nx, x) = 1 + \frac{n}{n+1}$, on peut trouver $x \in]0, \frac{1}{n+1}[$, avec $R(nx, x) > 2 - \epsilon$. En prenant $b = nx$, $c = x$ et $a = \frac{(n+1)(1-e^{-nx}) - ne^{-nx}(1-e^{-x})}{1-e^{-(n+1)x}}$, on obtient une suite de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées telles que, pour N suffisamment grand, on ait

$$\frac{\mathbb{E}M_N}{\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\}} > 2 - \epsilon,$$

ce qui montre que la constante 2 est optimale, même au sein de la classe des suites de variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées.

FIN