Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Devoir en temps libre

à rendre pour le 16 mars 2005

Le but est d'étudier divers aspects de l'espérance d'une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ arrêtée par des temps d'arrêts optimaux, c'est à dire maximisant l'espérance de la suite arrêtée sur la base de l'information dont on dispose quand on prend la décision et "inégalités du prophète" comparant l'espérance de gain optimal obtenue par un joueur qui s'arrête à l'instant n sur la base des observations antérieures à n et l'espérance de gain du prophète qui, connaissant toutes les observations (y compris celles du futur) s'arrête au maximum de la suite des observations.

Notations

On rappelle que par convention $\inf \varnothing = +\infty$. Dans tout le problème, P désigne une probabilité définie sur un espace mesurable $(\omega, \mathcal{F})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ est dite adaptée si pour tout n, X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des nombres entiers $n \geq 1$ et $\overline{\mathbb{N}^*} = \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$.

On appelle temps d'arrêt toute application $\tau : \Omega \to \overline{\mathbb{N}^*}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. On note T l'ensemble des temps d'arrêt bornés. Pour tout temps d'arrêt τ, on note

$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : \forall n \geq 1, A \cap \{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n\}.$$

Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite adaptée et τ un temps d'arrêt, on note X_τ la variable aléatoire définie par

$$X_\tau = \sum_{n=1}^{+\infty} X_n \mathbb{1}_{\{\tau=n\}},$$

c'est à dire que pour $n \geq 1$, X_τ vaut n sur l'ensemble $\{\tau = n\}$ et 0 sur l'ensemble $\{\tau = +\infty\}$.

Si a et b sont des nombres réels, on note $a \vee b$ le maximum de a et de b et $a \wedge b$ le minimum de a et de b. On note également $a^+ = a \vee 0$.

On rappelle enfin qu'une suite adaptée $(X_n)_{n\geq 1}$ est une surmartingale si pour tout entier $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] \leq X_n.$$

I Premières propriétés

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt si et seulement si pour tout entier $n \geq 1$, $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et qu'alors pour tout entier $n \geq 1$ $\{\tau \geq n+1\} \in \mathcal{F}_n$.
2. Montrer que si σ et τ sont des temps d'arrêts, alors $\sigma \vee \tau$ et $\sigma \wedge \tau$ sont des temps d'arrêts et que si $\sigma \leq \tau$, alors $\mathcal{F}_\sigma \subset \mathcal{F}_\tau$.
3. Montrer que si τ est un temps d'arrêt et si X est une variable aléatoire, X est mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_\tau$ si et seulement si pour tout entier $n \geq 1$, X restreinte à $\{\tau = n\}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n$.
4. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite adaptée de variables aléatoires et τ un temps d'arrêt. Montrer que X_τ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_\tau$.
5. Montrer que si τ est un temps d'arrêt et si X est une variable aléatoire intégrable, $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ sur l'ensemble $\{\tau = n\}$.
6. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite adaptée de variables aléatoires, A un ensemble borélien de $\mathbb{R}$ et $\sigma : \Omega \to \overline{\mathbb{N}^*}$ l'application définie par $\sigma(\omega) = \inf\{n \geq 1 : X_n(\omega) \in A\}$. Montrer que pour tout entier $N \geq 1$, τ et $\tau = \sigma \wedge N$ sont des temps d'arrêt.

II Temps d'arrêt optimal pour une suite finie

On fixe un entier N, une suite adaptée $(X_n)_{1\leq n\leq N}$ de variables aléatoires intégrables et on cherche à maximiser $\mathbb{E}X_\tau$ pour $\tau \in T, \tau \leq N$. Pour tout entier $n \in \{1,\ldots,n\}$, on note T_N^n l'ensemble des temps d'arrêts τ tels que $n \leq \tau \leq N$ et $T_N = T_N^1$. On définit par récurrence décroissante la suite de variables aléatoires $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ en posant

$$S_N = X_N \text{ puis pour tout } n \in \{N-1,\ldots,1\}, \quad S_n = \max(X_n, \mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n]).$$

Pour tout $n \in \{1,\ldots,N\}$, on note

$$\tau_n = \inf\{i \geq n : X_i = S_i\}.$$

1. Montrer que $\tau_n \in T_N^n$ et que $(S_n)_{1\leq n\leq N}$ est la plus petite surmartingale supérieure ou égale à $(X_n)_{1\leq n\leq N}$.
2. Montrer que tout $n \in \{1,\ldots,N-1\}$ et que pour tout temps d'arrêt $\sigma \in T_N^n$, $\mathbb{E}[X_\sigma|\mathcal{F}_n] \leq S_n$.

3. Montrer par récurrence décroissante sur n que pour tout entier $n \in \{1, \ldots, N\}$, on a
$$\mathbb{E}[X_{\tau_n} | \mathcal{F}_n] = S_n.$$
En déduire un temps d'arrêt optimal dans T_N, c'est à dire un élément τ^* de T_N tel que $\mathbb{E}X_{\tau^*} = \sup\{\mathbb{E}X_\tau : \tau \in T_N\}$.

III Inégalité du prophète par seuillage

Dans cette partie on suppose que les variables aléatoires $(X_n)_{1 \le n \le N}$ sont positives, intégrables et indépendantes. Soit
$$X_N^* = \sup_{1 \le n \le N} X_n.$$
On note m une médiane de X_N^*, c'est à dire un nombre réel défini par les inégalités
$$P(X_N^* < m) = q \le \frac{1}{2} \text{ et } P(X_N^* > m) = p \le \frac{1}{2}.$$
Pour toute constante $c \ge 0$, on note
$$\tau(c) = \inf\{n \le N : X_n \ge c\} \wedge N, \sigma(c) = \inf\{n \le N : X_n > c\} \wedge N,$$
$$\mathbb{E}^+ X_{\tau(c)} = \mathbb{E}\big(X_{\tau(c)} 1\!\!1_{\{X_{\tau(c)} \ge c\}}\big), \quad \mathbb{E}^+ X_{\sigma(c)} = \mathbb{E}\big(X_{\sigma(c)} 1\!\!1_{\{X_{\sigma(c)} > c\}}\big).$$
Soit T_N^s l'ensemble des temps d'arrêt de la forme $\tau(c)$ et $\sigma(c)$ pour les constantes $c \ge 0$. On note enfin $\beta = \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+$.

1. Montrer que $\mathbb{E}X_N^* \le m + \beta$.

2. Montrer que
$$\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} = mp + \sum_{i=1}^N \mathbb{E}(X_i - m)^+ 1\!\!1_{\{\sigma(m) > i-1\}} \ge mp + \beta(1-p)$$
et que
$$\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} \ge m(1-q) + \beta q.$$

3. En déduire que si $\beta \ge m$, $\mathbb{E}X_N^* \le 2\mathbb{E}^+ X_{\sigma(m)} \le 2\mathbb{E}X_{\sigma(m)}$ et que si $\beta \le m$, $\mathbb{E}X_N^* \le 2\mathbb{E}^+ X_{\tau(m)} \le 2\mathbb{E}X_{\tau(m)}$.

4. En déduire les inégalités du prophète:
$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_N^* &\le 2\sup\{\mathbb{E}X_\tau : \tau \in T_N^s\} && (1) \\ &\le 2\sup\{\mathbb{E}X_\tau : \tau \in T_N\} && (2) \end{aligned}$$

5. Montrer que dans l'inégalité (2) la constante 2 est optimale. (On pourra considérer la suite de variables aléatoires indépendantes $(X_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ avec $X_1 = 1$, $X_2 = M\mathbb{1}_{A_M}$ avec $P(A_M) = 1/M$ et $X_k = 0$ pour $k \geq 3$.) On admettra que cette constante 2 cesse d'être optimale si on demande en outre que les variables aléatoires $(X_n)_{1\leq n\leq N}$ soient de même loi.

6. Dans cette question, on suppose que pour chaque entier $N \geq 2$, les variables aléatoires $(X_n^{(N)})_{1\leq n\leq N}$ sont indépendantes de même loi: étant donnés des réels $a \in]0,1[$, $b > 0$, $c > 0$ tels que $b + c < N$, on suppose que

$$P(X_1^{(N)} = 0) = 1 - \frac{b+c}{N}, P(X_1^{(N)} = a) = \frac{c}{N}, P(X_1^{(N)} = 1) = \frac{b}{N}.$$

   (a) Montrer que

$$E = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}\big(\sup_{1\leq i\leq N} X_i^{(N)}\big) = a(e^{-b} - e^{-(b+c)}) + 1 - e^{-b}.$$

   (b) Montrer que

$$W(a) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}X_{\tau(a)}^{(N)} = \frac{ac+b}{a+b}(1 - e^{-(b+c)})$$

   et

$$W(1) = \lim_{N\to+\infty} \mathbb{E}X_{\tau(1)}^{(N)} = 1 - e^{-b}.$$

   (c) Montrer que si $a^* = \frac{(b+c)(1-e^{-b}) - be^{-b}(1-e^{-c})}{c(1-e^{-(b+c)})}$, on a $W(1) = W(a^*)$ et $0 < a^* < 1$.

   (d) Dans le cas $a = a^*$, déterminer

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{\mathbb{E}\sup(X_n^N)_{1\leq n\leq N}}{\sup\{\mathbb{E}X_\tau^{(N)} : \tau \in T_N^s\}}.$$

   En déduire que la constante 2 ne peut pas être améliorée dans l'inégalité (1), même lorsqu'on impose en outre aux variables aléatoires d'avoir la même loi.

FIN