Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

corrigé de l'examen du 30 juin 2005

Problème I

1. Si l'on pose
$$f_{n+1}(x) = x + 1\!\!1_{\{V_{n+1}\le x\}} - 1\!\!1_{\{U_{n+1}\le x\}},$$
f_n est une suite de fonctions indépendantes identiquement distribuées indépendante de X_0 et on a $X_{n+1} = f_{n+1}$: il s'ensuit que $(X_n)_{n\ge 0}$ est une chaîne de Markov. Comme $X_{n+1} - X_n$ est la différence de deux indicatrices, elle ne peut prendre que les valeurs 0,1 et -1. Soit $x \in \{0,\dots,N\}$. On a
$$\begin{aligned} P(X_{n+1}-X_n = 1|X_n = x) &= P(V_{n+1}\le x, \{U_{n+1}\le x\}^c) \\ &= P(V_{n+1}\le x)P(\{U_{n+1}\le x\}^c) \\ &= (x/N)(1-x/N) \end{aligned}$$
De même
$$\begin{aligned} P(X_{n+1}-X_n = -1|X_n = x) &= P(\{V_{n+1}\le x\}^c, U_{n+1}\le x) \\ &= P(\{V_{n+1}\le x\}^c)P(U_{n+1}\le x) \\ &= (1-x/N)(x/N) \end{aligned}$$
D'où
$$\begin{aligned} P(X_{n+1}-X_n = 0|X_n = x) &= 1 - P(X_{n+1}-X_n = 1|X_n = x) - P(X_{n+1}-X_n = -1|X_n = x) \\ &= 1 - 2(x/N)(1-x/N) \end{aligned}$$
Celà entraîne que la matrice de passage $P = (p_{i,j})_{0\le i,j\le N}$ vérifie pour tout i dans $\{0,\dots,N\}$: $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{i(N-i)}{N^2}$ et $p_{i,i} = 1 - \frac{2i(N-i)}{N^2}$. On peut aussi définir $p_{0,-1} = p_{N,N+1} = 0$. Comme $X_0 \in \{0,\dots,N\}$ et que $P(X_{n+1}\in\{0,\dots,N\}|X_n \in \{0,\dots,N\}) = 1$, on a pour tout n, $P(X_n \in \{0,\dots,N\}) = 1$, d'où par dénombrabilité $P(\forall n \in \mathbb{N} \quad X_n \in \{0,\dots,N\}) = 1$.

2. Pour $N = 5$, dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov.

3. Posons $A_n^i = \{V_{n+1} \leq i\}\Delta\{U_{n+1} \leq i\}$. Si deux événements A et B de même probabilité p sont indépendants, on a $P(A\Delta B) = P(A, B^c) + P(B, A^c) = P(A)P(B^c) + P(A^c)P(B) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$. Ici, les deux événements $\{V_{n+1} \leq i\}$ et $\{U_{n+1} \leq i\}$ sont indépendants de même probabilité i/N. Il s'ensuit que $P(A_n^i) = 2i/N(1 - i/N)$. Ainsi la série de terme général $P(A_n^i)$ diverge clairement: comme les événements A_n^i sont indépendants, le 2e lemme de Borel-Cantelli permet de dire que
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}(A_n^i)) = 1.$$

4. Soit $i \in \{1, \ldots, N-1\}$. Montrer que $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} X_n = i) = 0$.Comme X_n est à valeurs entières, si X_n converge vers i, alors pour n assez grand, on a $X_n = X_{n+1} = i$. Mais
$$\begin{aligned}\{X_n = X_{n+1} = i\} &= \{X_n = i; 1\!\!1_{\{V_{n+1}\leq i\}} - 1\!\!1_{\{U_{n+1}\leq i\}} = 0\} \\ &= \{X_n = i\} \cap (A_n^i)^c \\ &\subset (A_n^i)^c\end{aligned}$$
Ainsi
$$\{X_n \to i\} \subset \liminf_{n\to+\infty}(A_n^i)^c.$$
Mais
$$P(\liminf_{n\to+\infty}(A_n^i)^c) = 1 - P(\limsup_{n\to+\infty} A_n^i = 1 - 1 = 0,$$
donc $P(X_n \to i) = 0$.

5. Comme (X_n) est une chaîne de Markov, on a
$$\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n] = X_n + \mathbb{E}[1\!\!1_{\{V_{n+1}\leq X_n\}} - 1\!\!1_{\{U_{n+1}\leq X_n\}}|X_n]$$
Or pour tout $i \in \{0, \ldots, N\}$, on a
$$\mathbb{E}[1\!\!1_{\{V_{n+1}\leq X_n\}}|X_n = i] = P(V_{n+1} \leq i|X_n = i) = P(V_{n+1} \leq i),$$
où la dernière égalité découle du fait que V_{n+1} et X_n sont indépendantes. On a alors $\mathbb{E}[1\!\!1_{\{V_{n+1}\leq X_n\}}|X_n = i] = i/N$. Comme X_n est presque sûrement entre 0 et N, on a finalement
$$\mathbb{E}[1\!\!1_{\{V_{n+1}\leq X_n\}}|X_n] = X_n/N.$$
De même,
$$\mathbb{E}[1\!\!1_{\{U_{n+1}\leq X_n\}}|X_n] = X_n/N.$$
Il s'ensuit que $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_{n+1}|X_n] = X_n$, donc que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

6. (X_n) est une martingale bornée: $|X_n| \leq N$. En particulier $\sup \mathbb{E}|X_n| < +\infty$. Donc d'après le théorème de convergence de Doob, X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞. La suite (X_n) prend ses valeurs dans $\{0, \dots, N\}$ qui est un fermé, donc la limite X_∞ prend ses valeurs dans $\{0, \dots, N\}$. Cependant, on a vu que pour tout $i \in \{1, \dots, N-1\}$, on a $P(X_n \to i) = 0$: on en déduit que X_∞ prend ses valeurs dans $\{0; N\}$.
7. Comme la suite (X_n) est bornée, le théorème de convergence dominée implique que $\mathbb{E}X_n$ converge vers $\mathbb{E}X_\infty$. En réalité, comme (X_n) est une martingale, la suite $\mathbb{E}X_n$ est constante, donc $EX_\infty = \mathbb{E}X_0 = a$. D'un autre côté, si l'on note $p = P(X_\infty = N)$, on a $1 - p = P(X_\infty = 0)$, d'où $EX_\infty = (1-p).0 + p.N$, d'où $p = a/N$. Finalement la loi de X_∞ est $(1 - a/N)\delta_0 + a/n\delta_N$.
8. On applique le modèle précédent avec $a = 20$ et $N = 30$. Il y a deux chances sur trois de terminer avec uniquement des noires, et une chance sur trois de terminer avec uniquement des blanches.

Problème II

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendante suivant la loi μ. On suppose que le support de μ est $\mathbb{N}$. Soit ν une loi quelconque sur $\mathbb{N}$. On définit une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de X_0 suivant la loi ν et indépendante de $(U_n)_{n\geq 1}$, puis, pour $n \geq 0$

$$X_{n+1} = \begin{cases} U_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \\ X_n - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Si l'on pose $f_n(x) = x - 1 + (1 - x + U_n)\delta_0(x)$, (f_n) est une suite de fonctions indépendantes identiquement distribuées, indépendantes de X_0 et on a $X_{n+1} = f_{n+1}(X_n)$. $(X_n)_{n\geq 0}$ est donc une chaîne de Markov de loi initiale $\mathbb{P}_{X_0} = \nu$. La loi de X_{n+1} sachant $X_n = x$ est δ_{x-1} si $x > 0$, μ sinon, ce qui donne la matrice de passage:

$$\begin{pmatrix} \mu(0) & \mu(1) & \mu(2) & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $0 \to x$ car $\mathbb{P}^0(X_1 = n) = \mu(n) > 0$. D'autre part, $n \to 0$ car $\mathbb{P}^n(X_1 = n-1, X_2 = n-2, \dots, X_n = 0) = 1$. La chaîne est donc irréductible. Comme la chaîne est irréductible, elle admet la période de 0 comme période, mais la période de 0 est 1 car $\mathbb{P}^0(X_1 = 0) = \mu(0) > 0$.

3. Notons $A = \{\exists k \geq 1; X_k = 0\}$. On a vu que pour tout $n > 0$, $\mathbb{P}^n(X_1 = n-1, X_2 = n-2, \ldots, X_n = 0) = 1$ On en déduit que pour tout $n > 0$ $\mathbb{P}^n(A) = 1$. Maintenant

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^0(A) &= \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}^0(X_1 = j; \exists k \geq 1; X_k = 0) \\
&= \mathbb{P}^0(X_1 = 0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}^0(X_1 = j; \exists k \geq 2; X_k = 0) \\
&= \mathbb{P}^0(X_1 = 0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \mathbb{P}^0(X_1 = j)\mathbb{P}^j(A)
\end{aligned}$$

Mais on a vu que pour tout $j > 0$, $\mathbb{P}^j(A) = 1$, donc finalement

$$\mathbb{P}^0(A) = \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbb{P}^0(X_1 = j) = 1,$$

ce qui montre que 0 est récurrent. Comme la chaîne est irréductible, la chaîne est donc récurrente. Elle n'est donc évidemment pas transiente.

4. Pour tout $j \notin \{0, k+1\}$,

$$\mathbb{P}^\nu(X_0 = j, X_1 = k) = \nu(j)\mathbb{P}^j(X_1 = k) = \nu_j \delta_{j-1}(k) = 0.$$

On a donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^\nu(X_1 = k) &= \mathbb{P}^\nu(X_0 = 0, X_1 = k) + \mathbb{P}^\nu(X_0 = k+1, X_1 = k) \\
&= \nu(0)\mathbb{P}^0(X_1 = K) + \nu(k+1)\mathbb{P}^{k+1}(X_1 = k) \\
&= \nu(0)\mu(k) + \nu(k+1)
\end{aligned}$$

5. La chaîne est stationnaire si et seulement si $P^\nu_{X_1} = \nu$. D'après la question précédente, ν est stationnaire si et seulement si

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \nu(k) = \nu(0)\mu(k) + \nu(k+1).$$

Si la chaîne était stationnaire avec $\nu(0) = 0$, on aurait

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \nu(k) = \nu(k+1),$$

ce qui donne par récurrence $\forall k \in \mathbb{N} \quad \nu(k) = 0$: contradiction.

6. En fait sous $\mathbb{P}^0$, on a $T_0 = 1 + X_1$. En effet, si $X_1 = 0$, on a $T_0 = 1 = 1 + X_1$. D'autre part si $X_1 = k$, avec $k > 0$, on a: $X_2 = k-1, X_3 = k-2, \ldots, K_k = k-(k-1) = 1, X_{k+1} = k-k = 0$, d'où $T_0 = k+1 = X_0 + 1$.

7. Comme la chaîne de Markov est irréductible, si elle admet une probabilité invariante ν, on a nécessairement $\nu(0) = \frac{1}{\mathbb{E}^0 T_0}$. Mais on a vu que si la chaîne admettait une probabilité invariante ν, on aurait nécessairement $\nu(0) > 0$. Cela impose que $\mathbb{E}^0 T_0 < +\infty$. Mais comme on l'a vu, $1 + X_1$ et T_0 ont même loi sous P^0. Donc $(\mathbb{E}^0 T_0 < +\infty) \iff (\mathbb{E}^0 1 + X_1) < +\infty) \iff \mathbb{E}^0 X_1 < +\infty$, ce qui signifie que μ admet un moment d'ordre 1. D'autre part, on a bien
$$\nu(0) = \frac{1}{\mathbb{E}^0 T_0} = \frac{1}{1 + \mathbb{E} X_1}.$$

8. Considérons la mesure ν définie par
$$\nu(k) = \frac{\mathbb{P}(X_1 \geq k)}{1 + \mathbb{E} X_1}.$$
Montrons que ν est une probabilité: elle est évidemment positive et
$$\begin{aligned}
\sum_{k \geq 0} \nu(k) &= \frac{1}{1 + \mathbb{E} X_1} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 \geq k) \\
&= \frac{1}{1 + \mathbb{E} X_1} \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(1 + X_1 > k) \\
&= \frac{1}{1 + \mathbb{E} X_1} \mathbb{E}(1 + X_1) \\
&= 1
\end{aligned}$$
Il reste à vérifier que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \nu(k) = \nu(0)\mu(k) + \nu(k+1),$$
c'est à dire que
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \nu(k) = \frac{1}{\mathbb{E}(1 + X_1)} \mu(k) + \nu(k+1),$$
en multipliant par $\mathbb{E}(1+X_1)$, on se ramène à vérifier la condition équivalente:
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_1 \geq k) = \mu(k) + \mathbb{P}(X_1 \geq k+1),$$
soit
$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}(X_1 \geq k) = \mathbb{P}(X_1 = k) + \mathbb{P}(X_1 \geq k+1),$$
ce qui est évident car X_1 est à valeurs entières.

FIN