Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Examen du 30 juin 2005

durée: 3h

Le polycopié de cours et les calculatrices sont autorisés.

Problème I

Soit N un entier naturel non nul. Soient $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble fini à N éléments $\{1,\ldots,N\}$. On suppose également que les suites $(U_n)_{n\geq 1}$ et $(V_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes l'une de l'autre.

Pour tout $a \in \{0,\ldots,N\}$, on peut définir par récurrence une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par

$$\begin{cases} X_0 = a \\ X_{n+1} = X_n + 1\!\!1_{\{V_{n+1}\leq X_n\}} - 1\!\!1_{\{U_{n+1}\leq X_n\}}. \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $\{0,\ldots,N\}$ dont la matrice de passage $P = (p_{i,j})_{0\leq i,j\leq N}$ vérifie pour tout i dans $\{0,\ldots,N\}$: $p_{i,i+1} = p_{i,i-1} = \frac{i(N-i)}{N^2}$ et $p_{i,i} = 1 - \frac{2i(N-i)}{N^2}$. (Par convention $p_{0,-1} = p_{N,N+1} = 0$).

   On note désormais $\mathbb{P}^a$ la probabilité correspondante.

2. Pour $N = 5$, dessiner le graphe associé à cette chaîne de Markov.

3. Pour $i \in \{1,\ldots,N-1\}$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n^i = \{V_{n+1} \leq i\}\Delta\{U_{n+1} \leq i\}$. Montrer que
$$\mathbb{P}(\limsup_{n\to+\infty}(A_n^i)) = 1.$$

4. Soit $i \in \{1,\ldots,N-1\}$. Montrer que $\mathbb{P}(\lim_{n\to+\infty} X_n = i) = 0$.

5. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une martingale.

6. Montrer que X_n converge presque sûrement vers une variable aléatoire X_∞ qui prend ses valeurs dans $\{0, N\}$.

7. Déterminer la loi de X_∞. Indication: déterminer son espérance.

8. Une urne contient 20 boules noires et 10 boules blanches. On tire deux boules de l'urne, l'une après l'autre. On peint la deuxième des deux boules tirées avec la couleur de la première des deux boules tirées, puis on remet les deux boules dans l'urne. On répète alors sans cesse le même procédé. Quelle est la probabilité qu'au bout d'un certain moment, on ne tire plus que des boules noires ?

Problème II

Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendante suivant la loi μ. On suppose que le support de μ est $\mathbb{N}$. Soit ν une loi quelconque sur $\mathbb{N}$. On définit une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ par la donnée de X_0 suivant la loi ν et indépendante de $(U_n)_{n\geq 1}$, puis, pour $n \geq 0$

$$X_{n+1} = \begin{cases} U_{n+1} & \text{si } X_n = 0 \\ X_n - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de loi initiale ν. Écrire sa matrice.

2. Montrer que la chaîne est irréductible et apériodique.

3. La chaîne est-elle transiente, récurrente ?

4. Montrer que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \mathbb{P}^\nu(X_1 = k) = \nu(k+1) + \nu(0)\mu(k).$$

5. Montrer que si $\nu(0) = 0$, alors la chaîne n'est pas stationnaire.

6. Pour $k \geq 0$, on note

$$T_k = \inf\{n \geq 1; X_n = k\}.$$

   Montrer que sous $\mathbb{P}^0$, T_0 et $1 + X_1$ ont même loi.

7. En utilisant les questions précédentes, montrer que si la chaîne admet une mesure invariante, alors μ admet un moment d'ordre 1 et on a la relation $\nu(0) = \frac{1}{1+\mathbb{E}X_1}$.

8. Réciproquement, montrer que si μ admet un moment d'ordre 1, alors la chaîne admet une mesure invariante.
   Indication: on pourra considérer la mesure ν définie par
$$\nu(k) = \frac{\mathbb{P}(X_1 \geq k)}{1 + \mathbb{E}X_1}.$$

FIN