Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

corrigé de l'examen du 26 mai 2005

Exercice

Si on pose $f_n(x) = x + X_n$, on a bien $S_{n+1} = f_{n+1}(S_n)$, et (f_n) est une suite de fonctions aléatoires indépendantes identiquement distribuéees. (S_n) est donc bien une chaîne de Markov. Si la chaîne est dans l'état k au temps n, elle est dans l'état $k+1$ ou l'état $k-1$ au temps $n+1$. Ainsi le graphe de la chaîne de Markov est simplement le graphe d'adjacence sur $\mathbb{Z}$: il y a un lien de i vers j si et seulement si $|i-j|$=1. Ce graphe est clairement connexe: on peut aller de k à l en $|k-l|$ coups. La chaîne est donc irréductible. Chaque déplacement d'un sommet vers un autre change la parité du sommet. Cela signifie qu'un chemin de 0 à 0 a nécessairement une longueur paire: la période du graphe est donc un multiple de 2. En fait c'est 2 car on peut aller de 0 à 0 en deux coups (par exemple on va en un, puis on revient en zéro). D'après la loi des grands nombres S_n/n tend vers $2/3.1 + 1/3.(-1) = 1/3$. Il s'ensuit que S_n tend vers l'infini. Donc la chaîne ne passe presque sûrement qu'un nombre fini de fois en 0, donc la chaîne est transiente (et donc pas récurrente).

Problème

Partie I

1. Par définition de (Y_n)

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots Y_{n+1} = y_{n+1}) \\ = \sum_{(x_0,\dots,x_{n+1})\in f^{-1}(y_0)\times\cdots\times f^{-1}(y_{n+1})} &\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) \end{aligned}$$

Maintenant, comme X_n est une chaîne de Markov, on a

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n)p_{x_n,x_{n+1}},$$

ce qui nous amène à

$$\mathbb{P}(Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \ldots Y_{n+1} = y_{n+1})$$
$$= \sum_{(x_0,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y_0)\times f^{-1}(y_n)} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n) \sum_{x_{n+1}\in f^{-1}(y_{n+1})} p_{x_n,x_{n+1}}$$
$$= \sum_{(x_0,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y_0)\times f^{-1}(y_n)} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)\mathbb{P}^{x_n}(f(Y_1) = y_{n+1}$$

Soit maintenant $z_1 \in F$. Il existe $x \in E$ tel que $f(x) = z_1$. On pose alors pour tout $z_2 \in F$: $m_{z_1,z_2} = \mathbb{P}^x_{f(X_1)}(\{z_2\})$. D'après l'hypothèse faite dans l'énoncé, m est correctement défini car sa valeur ne dépend pas du choix de x. On peut alors réécrire:

$$\mathbb{P}(Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \ldots Y_{n+1} = y_{n+1})$$
$$= \sum_{(x_0,\ldots,x_n)\in f^{-1}(y_0)\times f^{-1}(y_n)} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \ldots, X_n = x_n)m_{y_n,y_{n+1}}$$
$$= \mathbb{P}(Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n)m_{y_n,y_{n+1}}$$

ce qui montre bien que (Y_n) est une chaîne de Markov de matrice de passage $(m_{z_1,z_2})_{(z_1,z_2)\in F\times F}$.

2. Si on pose $f_n(A) = A \cup \{X_n\}$, on a bien $A_{n+1} = f_{n+1}(A_n)$, et (f_n) est une suite de fonctions aléatoires indépendantes identiquement distribuéees. (S_n) est donc bien une chaîne de Markov. On a $A_{n+1} = f_{n+1}(A_n) = A_n$ si et seulement si $X_n \in A_n$. Sinon, A_{n+1} comprendra un élément de plus que A_n. Ainsi

$$\mathbb{P}^A(A_1 = A) = \mathbb{P}^A(X_1 \in A) = \frac{|A|}{|D|} = \frac{|A|}{6}.$$

Tandis que si $B = A \cup \{x\}$, avec $x \in D \backslash A$, on a

$$\mathbb{P}^A(A_1 = B) = \mathbb{P}^A(X_1 = x) = \frac{1}{|D|} = \frac{1}{6}.$$

Celà mène donc à la matrice de transition:

$$p_{A,B} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } A \subset B \text{ et } |B\backslash A| = 1 \\ \frac{|A|}{6} & \text{si } A = B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Il s'agit ici d'appliquer le résultat de la première question avec la fonction $f(A) = A$.

Pour celà, on doit montrer que si $f(A) = f(A')$, alors $\mathbb{P}^A_{f(A_1)} = \mathbb{P}^{A'}_{f(A_1)}$. Soient donc $A, A' \in \mathcal{P}(D)$, avec $|A| = |A'| = i$. La loi de A_1 sous $\mathbb{P}^A$ est

$$\frac{|A|}{6}\delta_A + \sum_{y\in D\backslash A} \frac{1}{6}\delta_{A\cup y}.$$

La loi de $f(A_1)$ sous $\mathbb{P}^A$ est la loi image de $\mathbb{P}^A_{A_1}$ par f: c'est

$$\frac{|A|}{6}\delta_{|A|} + \sum_{y\in D\backslash A} \frac{1}{6}\delta_{|A\cup y|} = \frac{1}{6}\delta_i + \frac{6-i}{6}\delta_{i+1}.$$

On voit que le résultat trouvé dépend ne dépend de $|A|$ que part la valeur de $|A|$: cela montre que les hypothèses sont bien vérifiées, (Y_n) est donc bien une chaîne de markov, et les coefficients de la ligne i de la matrice sont donnés par la loi $\frac{1}{6}\delta_i + \frac{6-i}{6}\delta_{i+1}$, soit

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1-\frac{i}{6} & \text{si } j = i+1 \\ \frac{i}{6} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie II

1. Soit $k \in \mathbb{N}$
$$\{T > k\} = \cap_{i=1}^k \{Y_k \leq Y_0\}.$$
Comme les variables aléatoires $Y_0, \dots Y_n$ sont toutes $\mathcal{F}_k$-mesurables, il s'ensuit que l'événement $\{T > k\}$ est $\mathcal{F}_k$-mesurable. Comme k est quelconque, T est un temps d'arrêt badapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

2. A un événement négligeable près $\mathbb{P}^x$, on a
$$\{T = n\} = \{Y_1, x, Y_2 = x, \dots, Y_{n-1} = x, Y_n = x+1,$$
d'où d'après la propriété de Markov
$$\mathbb{P}^x(T = n) = q_{x,x}^{n-1} q_{x,x+1} = (x/6)^{n-1}(1 - x/6),$$
ce qui montre bien que $\mathbb{P}^x_T$ est la loi géométrique $\mathcal{G}(1-\frac{x}{6})$. En particulier, sous $\mathbb{P}^x$ avec $x \neq 6$, T est presque sûrement fini.

3. On procède par récurrence sur n. Pout $n = 1$, c'est déjà acquis. Comme $S_{n+1} = \inf\{i > S_n : Y_i > Y_{S_n}\}$, on a
$$\{S_{n+1} \leq k\} = \cup_{j=1}^k \cup_{i=j+1}^k \{S_n = j\} \cap \{Y_i > Y_j\}.$$
Comme S_n est un temps d'arrêt, $\{S_n = j\}$ est $\mathcal{F}_j$ mesurable. Par ailleurs $Y_i > Y_j$ est $\mathcal{F}_i$ mesurable. Finalement, $\{S_{n+1} \leq k\}$est $\mathcal{F}_k$ mesurable, donc S_{n+1} est bien un temps d'arrêt.

4. Soit $x \in \{0,1,2,3,4,5\}$. On sait déjà que $\mathbb{P}^x(T_1 < +\infty) = 1$. Par définition de T_1, il est facile de voir que pour ω tel que $T_1 < +\infty$, on a
$$\sum_{i=0}^{T_1-1} \mathbb{1}_{\omega_i < \omega_{i+1}} = 1$$

Mais sous $\mathbb{P}^x$, on a presque sûrement et pour tout $i \mathbb{1}_{\omega_i<\omega_{i+1}} = \omega_{i+1} - \omega_i$, d'où $\omega_{T^1} - \omega_0 = 1$, soit

$$Y_{T_1} - Y_0 = 1 \ \mathbb{P}^x \text{p.s..}$$

5. Pour $k = 1$, on le sait déjà. Soit $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Supposons acquis que S_k est presque sûrement fini avec $\mathbb{P}^0_{Y_{S_k}} = \delta_k$: d'après la propriété de Markov forte, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^0(S^{k+1} < +\infty, Y_{S_{k+1}} = k+1) &= \mathbb{P}^0(T^{k+1} < +\infty, Y_{S_{k+1}} - Y_{S_k} = 1 \\
&= P(T^1(\theta^{T_k} Y) < +\infty, Y_{T^1(\theta^{T_k} Y)} - Y_{T_k} = 1) \\
&= \mathbb{P}^{T_k}(T_1 < +\infty, Y_{T_1} - Y_0 = 1) \\
&= \mathbb{P}^k(T_1 < +\infty, Y_{T_1} - Y_0 = 1) \\
&= 1
\end{aligned}$$

6. Soit A un événement qui se produit avant S_n et B un borélien de $\mathbb{R}$. On définit la fonction $f(\omega) = \mathbb{1}_{\{T(\omega)\in B\}}$, on pose $\tau = T_n$, $y = n$, $x = 0$ et on applique la propriété de Markov forte: il vient

$$\mathbb{P}^0(T(\theta^{S_n}) \in B, A, S_n < +\infty, Y_{S_n} = n) = \mathbb{P}^n(T \in B)\mathbb{P}^0(A, S_n < +\infty, Y_{S_n} = n),$$

ou encore

$$\mathbb{P}^0(T_{n+1} \in B, A, S_n < +\infty, Y_{S_n} = n) = \mathbb{P}^n(T \in B)\mathbb{P}^0(A, S_n < +\infty, Y_{S_n} = n),$$

soit en laissant de côté les événements de probabilité un:

$$\mathbb{P}^0(T_{n+1} \in B, A) = \mathbb{P}^0(A)\mathbb{P}^n(T \in B).$$

7. L'identité montrée à la question précédente montre

   - D'une part que T_{n+1} suit la loi $\mathbb{P}^n_T$, c'est à dire $\mathcal{G}(1 - n/6)$
   - D'autre part que T_{n+1} est indépendante de la tribu $\mathcal{F}_{T_n}$

   Soit k inférieur ou égal à n: la variable aléatoire T_k est évidemment $\mathcal{F}_{T_k}$ mesurable. Comme les temps d'arrêts T_k et T_n vérifient $T_k \le T_n$, $\mathcal{F}_{T_k} \subset \mathcal{F}_n$. Ainsi pour tout $k \in \{1, \dots n\}$, on a $\sigma(T_k) \subset \mathcal{F}_n$. Cela entraîne que $\sigma(T_1, T_2, \dots, T_n) \subset \mathcal{F}_n$. Comme T_{n+1} est indépendante de $\mathcal{F}_n$, elle est indépendante de $\sigma(T_1, T_2, \dots, T_n)$; finalement les T_k sont globalement indépendantes, ce qui donne finalement que la loi de $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ est

$$\mathcal{G}(1) \otimes \mathcal{G}(5/6) \otimes \mathcal{G}(4/6) \otimes \mathcal{G}(3/6) \otimes \mathcal{G}(2/6) \otimes \mathcal{G}(1/6).$$

8.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^0 S_6 &= \sum_{k=1}^{6} \mathbb{E}^0 T_k \\
&= \sum_{k=0}^{5} \frac{1}{1-k/6} \\
&= 6(\frac{1}{6}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}) \\
&= 14,7
\end{aligned}$$

et comme il y a indépendance

$$\begin{aligned}
\text{Var } S_6 &= \sum_{k=1}^{6} \text{Var } T_k \\
&= \sum_{k=0}^{5} \frac{(k/6)}{(1-k/6)^2} \\
&= 6(\frac{1}{5^2}+\frac{2}{4^2}+\frac{3}{3^2}+\frac{4}{2^2}+\frac{5}{1^2}) \\
&= 38,99
\end{aligned}$$

9. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\mathbb{E}^0 e^{\alpha S_6} < +\infty$. Comme les T_k sont indépendants, le théorème de Tonelli donn

$$\mathbb{E}^0 e^{\alpha S_6} = \prod_{k=1}^{6} \mathbb{E}^0 e^{\alpha T_k}.$$

Il s'ensuit que $\mathbb{E}^0 e^{\alpha S_6}$ si et seulement si pour tout k entre 1 et 6, $\mathbb{E}^0 e^{\alpha T_k} < +\infty\cdot$ Or si $X \sim \mathcal{G}(p)$

$$\mathbb{E} e^{\alpha X} = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{\alpha k}(1-p)^{k-1} p$$

donc l'espérance est finie si et seulement si $(1-p)e^{\alpha} < 1$. La condition est donc : pour tout k entre 0 et 5: $k/6 e^{\alpha} < 1$, ce qui se ramène à $\alpha < \ln 6/5$.

Soit $\beta = 1/2 \ln 6/5$. On a $0 < \beta < \ln 6/5$.

$$\mathbb{P}^0(S_6 > n) \le \mathbb{P}^0(e^{\beta S_6} > e^{\beta n}) \le x E^0 e^{\beta S_6} e^{-\beta n},$$

d'après l'inégalité de Markov.

FIN