Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Examen du 26 mai 2005

durée: 3h

Le polycopié de cours et les calculatrices sont autorisés.

Exercice

Soit X_n une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\frac{2}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_{-1}$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Montrer que $(S_n)_{n\geq 1}$ est une chaîne de Markov. Est-elle

- irréductible ?
- apériodique ?
- transiente ?
- récurrente ?

Dans chaque cas, on justifiera la réponse.

Problème

Le but du problème est d'étudier le nombre de lancers nécessaire pour voir apparaître toutes les faces d'un dé.

On rappelle que pour $p \in]0, 1[$, la loi géométrique de paramètre p, notée $\mathcal{G}(p)$ est la loi à support dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout k dans $\mathbb{N}^*$, on a $\mathcal{G}(p)(\{k\}) = p(1-p)^{k-1}$. On note également $\mathcal{G}(1) = \delta_1$.

Partie I

1. *Question préliminaire:* Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov sur un ensemble fini E de matrice de transition $P = (p_{x,y})_{(x,y)\in E\times E}$. On se donne une appplication surjective f de E dans un ensemble F telle que l'on ait

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad (f(x) = f(y) \Longrightarrow \mathbb{P}^x_{f(X_1)} = \mathbb{P}^y_{f(X_1)}$$

Montrer que la suite (Y_n) définie par $Y_n = f(X_n)$ est une chaîne de Markov à valeurs dans F dont la matrice de transition M vérifie

$$\forall (x,y) \in E^2 \quad m_{f(x),f(y)} = \sum_{z:f(z)=f(y)} p_{x,z}$$

Indication: on pourra montrer que

$$\mathbb{P}(Y_0 = y_0, Y_1 = y_1, \dots Y_{n+1} = y_{n+1})$$
$$= \sum_{(x_0,\dots,x_n)\in f^{-1}(y_0)\times\cdots\times f^{-1}(y_n)} \mathbb{P}(X_0 = x_0, \dots, X_n = x_n) \sum_{x_{n+1}\in f^{-1}(y_{n+1})} p_{x_n,x_{n+1}}$$

2. Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'ensemble fini $D = \{1,2,3,4,5,6\}$. On définit une suite aléatoire d'ensembles $(A_k)_{k\geq 0}$ par la récurrence:

$$\begin{cases} A_0 = \varnothing \\ A_{n+1} = A_n \cup \{X_{n+1}\} \end{cases}$$

Ainsi, X_n représente le résultat du n-ième lancer, et A_n l'ensemble des faces qui sont apparues avant le n-ième lancer ou au n-ième lancer.

Montrer que $(A_k)_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans l'ensemble $E = \mathcal{P}(D)$ et dont les probabilités de transitions sont données par

$$p_{A,B} = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{si } A \subset B \text{ et } |B\backslash A| = 1 \\ \frac{|A|}{6} & \text{si } A = B \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

3. Pour tout $n \geq 0$, on pose $Y_n = |A_n|$. Montrer que $(Y_k)_{k\geq 0}$ est une chaîne de Markov à valeurs dans $F = \{0,1,2,3,4,5,6\}$admettant la matrice de transition:

$$q_{i,j} = \begin{cases} 1 - \frac{i}{6} & \text{si } j = i+1 \\ \frac{i}{6} & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Partie II

Dans la suite, quelque soit $x \in F$, on note $\mathbb{P}^x$ la mesure markovienne sur la tribu borélienne de $\Omega = F^{\mathbb{N}}$ correspondant à une chaîne de Markov partant de x et de matrice de transition $(q_{i,j})_{(i,j)\in F\times F}$.

Pour $n \geq 0$, on note Y_n la variable aléatoire définie par $Y_n(\omega) = \omega_n$. On note alors $\mathcal{F}_n$ la tribu engendrée par les variables aléatoires $Y_0, Y_1, \ldots Y_n$.

On rappelle que $\mathbb{P}^x$ satisfait à la propriété de Markov forte: pour tout temps d'arrêt τ adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ et tout $y \in F$, on a pour toute fonction mesurable bornée f de Ω dans $\mathbb{R}$ et pour tout événement $\mathcal{F}_\tau$-mesurable A:

$$\mathbb{E}^x[f(\theta^\tau Y)\mathbb{1}_{\{A,\tau<+\infty,Y_\tau=y\}}] = \mathbb{E}^y[f(Y)]\mathbb{P}^x(A, \tau < +\infty, Y_\tau = y).$$

Pour $\omega \in \Omega$, on note

$$T(\omega) = \inf\{n \geq 1; \omega_n > \omega_0\}.$$

1. Montrer que T est un temps d'arrêt adapté à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$

2. Montrer que $\mathbb{P}^x_T$ (la loi image de $\mathbb{P}^x$ par T) est la loi géométrique $\mathcal{G}(1 - \frac{x}{6})$.
   On note $T^1 = T$, puis pour tout $k \in \{1, \ldots, 5\}$:

   $$T_{k+1}(\omega) = \begin{cases} T(\theta^{T_1(\omega)+T_2(\omega)+\ldots T_k(\omega)}\omega) & \text{si } T_1(\omega) + T_2(\omega) + \ldots T_k(\omega) < +\infty \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases},$$

   où θ est l'opérateur usuel de translation. Pour tout n entre 1 et 6, on note $S_n = T_1 + T_2 + \cdots + T_n$.

3. Montrer que $(S_n)_{1\leq n\leq 6}$ est une suite croissante de temps d'arrêts adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$.
   Indication: on pourra procéder par récurrence et remarquer que

   $$\{S_{n+1} \leq k\} = \cup_{j=1}^{k-1}\{S_{n+1} \leq k\} \cap \{S_n = j\}.$$

4. Montrer que pour tout $x \in \{1, \ldots, 5\}$, on a

   $$\mathbb{P}^x(T_1 < +\infty, Y_{T_1} - Y_0 = 1) = 1.$$

5. En utilisant la propriété de Markov forte montrer que pour tout k entre 1 et 6, on a $\mathbb{P}^0(S_k < +\infty, Y_{S_k} = k) = 1$.

6. Soit A un événement qui se produit avant S_n et B un borélien de $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathbb{P}^0(T_{n+1} \in B, A) = \mathbb{P}^0(A)\mathbb{P}^n(T \in B)$.

7. Montrer que la loi de $(T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6)$ sous $\mathbb{P}^0$ est

   $$\mathcal{G}(1) \otimes \mathcal{G}(5/6) \otimes \mathcal{G}(4/6) \otimes \mathcal{G}(3/6) \otimes \mathcal{G}(2/6) \otimes \mathcal{G}(1/6).$$

8. Montrer que $\mathbb{E}^0 S_6 = 14,7$ et $\mathbb{V}\mathrm{ar}^0 S_6 = 38,99$.

9. Déterminer l'ensemble des réels α tels que $\mathbb{E}^0 e^{\alpha S_6} < +\infty$. En déduire l'existence d'un réel $\beta > 0$ tel que

   $$\mathbb{P}^0(S_6 > n) = O(e^{-\beta n}).$$

FIN