Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Corrigé de l'examen partiel du 25 mars 2005

1. $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}]$. Comme $(X_n)_{n\geq 1}$ est une martingale, $\mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$, et d'autre part X_{n-1} est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, donc $\mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = X_{n-1}$, ce qui donne finalement $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[X_n|\mathcal{F}_{n-1}] - \mathbb{E}[X_{n-1}|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$.

2. On a
$$\{\nu_t \leq n\} = \{s_n \geq t\}.$$
Or $s_n = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$: pour tout k $\sigma_k^2 = \mathbb{E}[Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}$ est $\mathcal{F}_{k-1}$ mesurable. Mais la suite des tribus $(\mathcal{F}_k)$ est croissante, donc pour tout $k \in \{1,\dots,n\}$, σ_k^2 est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable. Finalement la somme s_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable, ce qui montre que $\{\nu_t \leq n\} = \{s_n \geq t\} \in \mathcal{F}_{n-1}$.

   De plus ν_t est presque sûrement fini, car l'hypothèse $\mathbb{P}(s_n \to +\infty) = 1$ implique qu'il existe presque sûrement un entier s_n tel que $s_n \geq t$.

3. (a) Si $\nu_t \neq k$ ou $\sigma_k = 0$, l'inégalité est évidente. Si $\nu_t = k$, celà signifie que $s_k \geq t$ et que $s_{k-1} < t$. La deuxième inégalité implique que $\varepsilon(k,t)$ est bien défini et est (strictement) positif. Ensuite on a $s_k = s_{k-1} + \sigma_k^2 \geq t$, d'où $t - s_{k-1} \leq \sigma_k^2$ et finalement $\varepsilon(k,t) \leq 1$.

   (b) On peut réécrire
$$\varepsilon(k,t) = 1\!\!1_{\{\nu_t > k\}} + 1\!\!1_{\{\nu_t = k\}} \sqrt{\frac{t - s_{k-1}}{\sigma_k^2}}$$
   Comme ν_t est un $(\mathcal{F}_{n-1})_{n\geq 1}$ temps d'arrêt, les événements $\{\nu_t > k\}$ et $\{\nu_t = k\}$ sont $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurables. D'autre part, la variable aléatoire $1\!\!1_{\{\sigma_k > 0\}} \sqrt{\frac{t-s_{k-1}}{\sigma_k^2}}$ est mesurable par rapport à la tribu engendrée par $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$. Mais toutes ces variables aléatoires sont $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurables, donc finalement $\varepsilon(k,t)$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable.
   On a donc
$$\mathbb{E}[Z_k^t|\mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[\varepsilon(k,t)Y_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \varepsilon(k,t)\mathbb{E}[Y_k|\mathcal{F}_{k-1}] = \varepsilon(k,t).0 = 0.$$

(c) $Z_k^t = \varepsilon(k,t)Y_k$. A la question précédente, on a montré que $\varepsilon(k,t)$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable: a fortiori, il est donc $\mathcal{F}_k$-mesurable. Comme Y_k est la différence d'une variable $\mathcal{F}_k$-mesurable et d'une variable $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable (et donc $\mathcal{F}_k$-mesurable), elle est $\mathcal{F}_k$-mesurable. Finalement Z_k^t est $\mathcal{F}_k$-mesurable pour tout $k \geq 1$, ce qui montre bien que le processus $(Z_k^t)_{k\geq 0}$ est $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 0}$-adapté.

4. (a) On a
$$\tau_{k,t}^2 = \mathbb{E}[(Z_k^t)^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \mathbb{E}[\varepsilon(k,t)^2 Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}].$$
Mais $\varepsilon(k,t)$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable, donc $\varepsilon(k,t)^2$ aussi et donc
$$\mathbb{E}\varepsilon(k,t)^2 Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \varepsilon(k,t)^2\mathbb{E}Y_k^2|\mathcal{F}_{k-1}] = \varepsilon(k,t)^2\sigma_k^2.$$

(b) On a $Z_k^t = \varepsilon(k,t)Y_k$. Comme $|\varepsilon(k,t)| \leq 1$, on a donc $|Z_k^t| \leq |Y_k| \leq K$, ce qui entraîne $(Z_k^t)^2 \leq K^2$, d'où $\tau_{k,t} = (\mathbb{E}[(Z_k^t)^2|\mathcal{F}_{k-1}])^{1/2} \leq K$. Ainsi, on a $|Z_k^t| \leq K$ et $0 \leq \tau_{k,t} \leq K$, ce qui entraîne évidemment $|Z_k^t|^3 \leq K(Z_k^t)^2$ et $\tau_{k,t}^3 \leq K\tau_{k,t}^2$.

(c) Soit $t > 0$.
$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2 &= \sum_{k=1}^{+\infty} \varepsilon(k,t)^2\sigma_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\nu_t-1} \varepsilon(k,t)^2\sigma_k^2 + \varepsilon(\nu_t,t)^2\sigma_{\nu_t}^2 + \sum_{k=\nu_t+1}^{+\infty} \varepsilon(k,t)^2\sigma_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\nu_t-1} 1.\sigma_k^2 + \varepsilon(\nu_t,t)^2\sigma_{\nu_t}^2 + \sum_{k=\nu_t+1}^{+\infty} 0.\sigma_k^2 \\
&= s_{\nu_t-1} + \varepsilon(\nu_t,t)^2\sigma_{\nu_t}^2 \\
&= s_{\nu_t-1} + (t - s_{\nu_t-1}) \\
&= t.
\end{aligned}$$

(d) On a
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2 - \sum_{k=1}^{n} \tau_{k,t}^2,$$
donc d'après la question précédente
$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2 = t - \sum_{k=1}^{n} \tau_{k,t}^2.$$
Mais par définition de l'espérance conditionnelle, $\tau_{k,t}$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable, donc pour tout k entre 1 et n $\tau_{k,t}^2$ est $\mathcal{F}_{k-1}$-mesurable, et donc $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, ce qui entraine que $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2 = t - \sum_{k=1}^{n} \tau_{k,t}^2$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_n^t = \sum_{k \le n} Z_k^t + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t} N_k \tag{1}$$

(a) Pour $k > \nu_t$ $\varepsilon(k,t) = 0$ donc $\tau_{k,t} = 0$, ce qui fait que presque sûrement les termes de la somme sont nuls à partir d'un certain rang.

(b) On a

$$T_0^t = \sum_{k=1}^{+\infty} \tau_{k,t} N_k = \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \tau_{k,t} N_k$$

Donc

$$e^{i \frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}} = \lim_{p \to +\infty} \exp(i \frac{s}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{p} \tau_{k,t} N_k).$$

Comme $|\exp(i \frac{s}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{p} \tau_{k,t} N_k)| \le 1$ pour tout p, le théorème de convergence dominée s'applique, et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[e^{i \frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}} | \mathcal{F}_\infty] &= \lim_{p \to +\infty} \mathbb{E}[\exp(i \frac{s}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{p} \tau_{k,t} N_k) | \mathcal{F}_\infty] \\ &= \lim_{p \to +\infty} \exp(-\frac{s^2}{t} \sum_{k=1}^{p} \tau_{k,t}^2) \\ &= \exp(\frac{-s^2}{t} \sum_{k=1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2) \\ &= \exp(\frac{-s^2}{t} t) = \exp(-s^2) \end{aligned}$$

En réintégrant, on a

$$\mathbb{E}[e^{i \frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}}] = \mathbb{E}\mathbb{E}[e^{i \frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}} | \mathcal{F}_\infty] = \exp(-s^2),$$

ce qui montre que $\frac{T_0^t}{\sqrt{t}}$ a même fonction caractéristique que la loi $\mathcal{N}(0,1)$: comme la fonction caractéristique caractérise la loi, on a donc $\frac{T_0^t}{\sqrt{t}} N(0,1)$.

6. On a pour tout $N \ge 1$

$$\mathbb{E} e^{i \frac{sT_N^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E} e^{i \frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}} = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E} e^{i \frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E} e^{i \frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}e^{i\frac{sT_N^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}}| &\leq \sum_{n=1}^{N} |\mathbb{E}e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}| \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbb{E}e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}|\end{aligned}$$

En prenant $N = \nu_t$, on obtient alors l'inégalité

$$|\mathbb{E}e^{i\frac{sT_{\nu_t}^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbb{E}e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}|.$$

7. (a) Comme le processus $(Z_k^t)_{k\geq 1}$ est $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$-adapté, $\sum_{k=1}^{n-1} Z_k^t$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable, ce qui implique que $\alpha_{n,t}$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable. Comme $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{G}_n$, $\alpha_{n,t}$ est $\mathcal{G}_n$-mesurable.
D'autre part
   - Z_n^t est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{G}_n$.
   - $\tau_{n,t}$ est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_\infty \subset \mathcal{G}_n$.
   - N_n est mesurable par rapport à $\sigma(N_n) \subset \mathcal{G}_n$.

   Ces trois éléments entraînent que $\beta_{n,t}$ est $\mathcal{G}_n$-mesurable.
   Ainsi

$$\mathbb{E}[e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}|\mathcal{G}_n] = \mathbb{E}[\alpha_{n,t}\beta_{n,t}\gamma_{n,t}|\mathcal{G}_n] = \alpha_{n,t}\beta_{n,t}\mathbb{E}[\gamma_{n,t}|\mathcal{G}_n].$$

   Comme

$$\gamma_{n,t} = \lim_{p\to+\infty} \exp\big(\frac{is}{\sqrt{t}} \sum_{k=n+1}^{p} \tau_{k,t}N_k\big),$$

   on a, toujours grâce au théorème de convergence dominée (avec domination par 1):

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\gamma_{n,t}|\mathcal{G}_n] &= \lim_{p\to+\infty} \mathbb{E}\exp\big(\frac{is}{\sqrt{t}} \sum_{k=n+1}^{p} \tau_{k,t}N_k\big|\mathcal{G}_n\big) \\ &= \lim_{p\to+\infty} \exp\big(-\frac{s^2}{2t} \sum_{k=n+1}^{p} \tau_{k,t}^2\big) \\ &= \exp\big(-\frac{s^2}{2t} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2\big)\end{aligned}$$

   On a donc bien

$$\mathbb{E}[e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}|\mathcal{G}_n] = \alpha_{n,t}\beta_{n,t}\exp(-\frac{s^2}{2t} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2).$$

(b) En réintégrant cette dernière égalité, on obtient

$$\mathbb{E}[e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}] = \mathbb{E}\alpha_{n,t}\beta_{n,t}\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2).$$

Le deuxième membre peut s'évaluer en désintégrant par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$:

$$\mathbb{E}[\alpha_{n,t}\beta_{n,t}\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2)|\mathcal{F}_{n-1}] \quad = \quad \alpha_{n,t}\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2)\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}]$$

En effet $\alpha_{n,t}$ et $\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2)$ sont mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{n-1}$: pour la première, on a montré celà au 7)a) et pour la deuxième celà découle de la question 4d. Comme $0 \le alpha_{n,t} \le 1$ et $\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2) \le 1$, on a donc

$$|\mathbb{E}[\alpha_{n,t}\beta_{n,t}\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2)|\mathcal{F}_{n-1}| \le |\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}]|,$$

d'où

$$|\mathbb{E}\alpha_{n,t}\beta_{n,t}\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2)| \le \mathbb{E}|\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}]|,$$

soit

$$|\mathbb{E}\big(e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}\big)| \le \mathbb{E}|\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}]|.$$

(c) Posons $\Psi(x) = e^{ix} - (1 + ix - \frac{1}{2}x^2)$. On a

$$\begin{aligned}\beta_{n,t} &= 1 + \frac{is}{\sqrt{t}}Z_n^t - \frac{s^2}{2t}(Z_n^t)^2 + \Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}Z_n^t) - (1 + \frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n - \frac{s^2}{2t}\tau_{n,t}^2N_n^2 + \Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n)) \\ &= \frac{is}{\sqrt{t}}(Z_n^t - \tau_{n,t}N_n) - \frac{s^2}{2t}((Z_n^t)^2 - \tau_{n,t}^2N_n^2) + \Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}Z_n^t) - \Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n)\end{aligned}$$

D'après 3b), on a $E[Z_n^t|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$. On a également $\mathbb{E}[\tau_{n,t}N_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \tau_{n,t}\mathbb{E}[N_n|\mathcal{F}_{n-1}] = \tau_{n,t}\mathbb{E}[N_n] = \tau_{n,t}.0 = 0$. $E[(Z_n^t)^2|\mathcal{F}_{n-1}] = \tau_{k,t}^2$ et $\mathbb{E}[\tau_{n,t}^2N_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] = \tau_{n,t}^2\mathbb{E}[N_n^2|\mathcal{F}_{n-1}] = \tau_{n,t}^2\mathbb{E}[N_n^2] = \tau_{n,t}^2.1 = \tau_{n,t}^2$. Il s'ensuit que

$$\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}[\Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}Z_n^t) - \Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n)|\mathcal{F}_{n-1}].$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}]| &= \mathbb{E}|\mathbb{E}[\Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}Z_n^t) - \Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n)|\mathcal{F}_{n-1}]| \\
&\leq \mathbb{E}\mathbb{E}[|\Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}Z_n^t)| + |\Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n)||\mathcal{F}_{n-1}]| \\
&\leq \mathbb{E}\Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}Z_n^t)| + |\Psi(\frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n)| \\
&\leq \mathbb{E}\frac{|s|^3}{6t^{3/2}}\left(|Z_n^t|^3 + |\tau_{n,t}N_n|^3\right) \\
&\leq \frac{|s|^3}{6t^{3/2}}(\mathbb{E}|Z_n^t|^3 + \mathbb{E}|\tau_{n,t}N_n|^3)
\end{aligned}$$

(d) En utilisant la question 4b), on a

$$\mathbb{E}|Z_n^t|^3 + \mathbb{E}|\tau_{n,t}N_n|^3 \leq K(\mathbb{E}(Z_n^t)^2 + \mathbb{E}\tau_{n,t}^2|N_n|^3)$$

Mais comme $\tau_{n,t}^2 = \mathbb{E}[(Z_n^t)^2|\mathcal{F}_{n-1}]$, on a $\mathbb{E}\tau_{n,t}^2 = E[(Z_n^t)^2$. D'autre part, comme N_n est indépendante de $\mathcal{F}_\infty$, elle l'est de $\tau_{n,t}$, donc $\mathbb{E}\tau_{n,t}^2|N_n|^3 = \mathbb{E}\tau_{n,t}^2\mathbb{E}|N_n|^3 = \mathbb{E}\tau_{n,t}^2\mathbb{E}|N_0|^3$, où la dernière égalité provient du fait que les N_n ont toutes même loi. Finalement,

$$\mathbb{E}|Z_n^t|^3 + \mathbb{E}|\tau_{n,t}N_n|^3 \leq K(1 + \mathbb{E}|N_0|^3)\mathbb{E}\tau_{k,t}^2.$$

En combinant avec b) et c), celà donne

$$|\mathbb{E}e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}| \leq \frac{|s|^3}{6t^{3/2}}K(1 + \mathbb{E}|N_0|^3)\mathbb{E}\tau_{n,t}^2.$$

8. En combinant 6) et 7c), on obtient

$$|\mathbb{E}e^{i\frac{sT_{\nu_t}^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}}| \leq \frac{|s|^3}{6t^{3/2}}K(1 + \mathbb{E}|N_0|^3)\sum_{n_1}^{+\infty}\mathbb{E}\tau_{n,t}^2.$$

Mais d'après le théorème de convergence monotone, on a

$$\sum_{n_1}^{+\infty}\mathbb{E}\tau_{n,t}^2 = \mathbb{E}\sum_{n_1}^{+\infty}\tau_{n,t}^2 = \mathbb{E}t,$$

où l'on a utilisé la question 4c). Finalement

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}e^{i\frac{sT_{\nu_t}^t}{\sqrt{t}}} - \exp(-\frac{s^2}{2})| &= |\mathbb{E}e^{i\frac{sT_{\nu_t}^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}}| \\
&\leq \frac{|s|^3}{6t^{1/2}}K(1 + \mathbb{E}|N_0|^3),
\end{aligned}$$

qui tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$. Ainsi la fonction caractéristique de $\frac{T_n^t}{\sqrt{t}}$ converge ponctuellement vers $s \mapsto \exp(-\frac{s^2}{2})$ qui est la fonction caractéristique de $\mathcal{N}(0,1)$. D'après le théorème de Levy, cela entraîne que

$$\frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

9.

$$T_{\nu_t}^t = \sum_{k \le \nu_t} Z_k^t + \sum_{k=\nu_t+1}^{+\infty} \tau_{k,t} N_k$$

On a déjà vu que $\tau_{k,t} = 0$ pour $k > \nu_t$. D'où

$$\begin{aligned}
T_{\nu_t}^t &= \sum_{k \le \nu_t} Z_k^t \\
&= \sum_{k \le \nu_t} \varepsilon(k,t) Y_k \\
&= \sum_{k < \nu_t} \varepsilon(k,t) Y_k + \varepsilon(\nu_t, t) Y_{\nu_t} \\
&= \sum_{k < \nu_t} Y_k + \varepsilon(\nu_t, t) Y_{\nu_t} \\
&= \sum_{k \le \nu_t} Y_k - Y_{\nu_t} + \varepsilon(\nu_t, t) Y_{\nu_t} \\
&= \sum_{k \le \nu_t} (X_k - X_{k-1}) - Y_{\nu_t} + \varepsilon(\nu_t, t) Y_{\nu_t} \\
&= X_{\nu_t} - (1 - \varepsilon(\nu_t, t)) Y_{\nu_t, t}
\end{aligned}$$

Soit donc $T_{\nu_t} + (1 - \varepsilon(\nu_t, t)) Y_{\nu_t} = X_{\nu_t}$.

10. D'après le théorème de Levy, il suffit de montrer que pour tout s réel $\mathbb{E} \exp(is \frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}})$ tend vers $\exp(-\frac{s^2}{2})$. Mais d'après la question précédente, $\mathbb{E} \exp(is \frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}})$ tend vers $\exp(-\frac{s^2}{2})$. Il suffit donc de prouver que pour tout s réel

$$\mathbb{E} \exp(is \frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}} - \mathbb{E} \exp(is \frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}})$$

tend vers 0. Mais

Montrer que

$$\frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \exp(is \frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}} - \mathbb{E} \exp(is \frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}}) &= \mathbb{E}(\exp(is \frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}} - \exp(is \frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}})) \\
&= \mathbb{E} \exp(is \frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}})(\exp(is \frac{(1 - \varepsilon(\nu_t, t)) Y_{\nu_t}}{\sqrt{t}}) - 1)
\end{aligned}$$

D'où

$$|\mathbb{E}\exp(is\frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}} - \mathbb{E}\exp(is\frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}})| \quad \leq \quad \mathbb{E}|\exp(is\frac{(1-\varepsilon(\nu_t,t))Y_{\nu_t}}{\sqrt{t}}) - 1|$$

Ce dernier majorant tend vers 0 d'après le théorème de convergence dominée. En effet $|\exp(is\frac{(1-\varepsilon(\nu_t,t))Y_{\nu_t}}{\sqrt{t}}) - 1|| \leq 2$ et $|\exp(is\frac{(1-\varepsilon(\nu_t,t))Y_{\nu_t}}{\sqrt{t}}) - 1|$ tend presque sûrement vers 0 car $|\frac{(1-\varepsilon(\nu_t,t))Y_{\nu_t}}{\sqrt{t}}| \leq \frac{K}{\sqrt{t}}$.

FIN