Université d'Orléans **Master AMA 1**

Unité M2MT01

Probabilités Approfondies

Examen partiel du 25 mars 2005

durée: 3h

Le polycopié de cours et les calculatrices sont autorisés.

Le but du problème est de montrer un théorème de limite centrale pour une certaine famille de martingales.

Notations
Dans tout le problème, $\mathbb{P}$ désigne une probabilité définie sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$. On pose par convention $\mathcal{F}_0 = \{\varnothing, \Omega\}$. On note également $\mathcal{F}_\infty = \vee_{n\geq 1}\mathcal{F}_n$ la plus petite tribu contenant tous les $\mathcal{F}_n$. On note $\mathbb{E}$ l'espérance sous la mesure de probabilité $\mathbb{P}$.

On considère une martingale intégrable $(X_n)_{n\geq 1}$ $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 1}$-adaptée. On pose par convention $X_0 = 0$.

On suppose qu'il existe une constante K telle que

$$\forall n \geq 1 \quad |X_n - X_{n-1}| \leq K. \tag{1}$$

Pour $n \geq 1$, on note $Y_n = X_n - X_{n-1}$ et on pose

$$\sigma_n = \left(\mathbb{E}Y_n^2|\mathcal{F}_{n-1}\right)^{1/2}.$$

On définit également

$$s_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad s_n = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^2.$$

On suppose enfin que l'hypothèse suivante est vérifiée:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty \ \mathbb{P} \text{ p.s.} \tag{2}$$

Énonçons à présent le résultat qu'on se propose de montrer:

Pour $t > 0$, on considère

$$\nu_t = \inf\{n \geq 0 : s_n \geq t\}.$$

Le but du problème est de montrer que

$$\frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

Pour les besoins de la preuve, on aura besoin de considérer sur le même espace une suite $(N_k)_{k\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées suivant la loi $\mathcal{N}(0,1)$ telle que la tribu $\mathcal{N} = \sigma(N_k, k \geq 1)$ engendrée par les variables aléatoires $\{N_k, k \geq 1\}$ soit indépendante de la tribu $\mathcal{F}_\infty$. On admettra sans démonstration qu'il est toujours possible de se ramener à ce cas.

****

À toutes fins utiles, on rappelle les résultats suivants, qu'il n'est pas nécessaire de redémontrer:

- théorème de convergence dominé conditionnel: soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires convergeant presque sûrement vers une variable aléatoire U sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On suppose de plus qu'il existe une variable aléatoire V intégrable telle que pour tout $n \geq 1$ $|U_n| \leq V$. Alors U est intégrable et pour toute sous-tribu $\mathcal{A}$ de $\mathcal{F}$, on a

$$\mathbb{E}[U|\mathcal{A}] = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[U_n|\mathcal{A}].$$

- Soit U, V deux vecteurs aléatoires à valeurs respectives dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^p$. Soit $\mathcal{A}$ une tribu telle que V soit $\mathcal{A}$-mesurable et U indépendante de $\mathcal{A}$. Alors, on a pour toute fonction bornée f de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{C}$:

$$\mathbb{E}[f(U,V)|\mathcal{A}] = \phi(V),$$

où $\phi(t) = \mathbb{E}f(U,t)$.

****

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, on a $\mathbb{E}[Y_n|\mathcal{F}_{n-1}] = 0$.

2. Pour n entier naturel non nul, on pose $\mathcal{H}_n = \mathcal{F}_{n-1}$. Montrer que pour tout $t > 0$, ν_t est un temps d'arrêt $(\mathcal{H}_n)_{n\geq 1}$-adapté presque sûrement fini.

3. Soit $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On définit $\varepsilon(k,t)$ par

$$\varepsilon(k,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } \nu_t > k \\ \sqrt{\frac{t-s_{k-1}}{\sigma_k^2}} & \text{si } \nu_t = k \\ 0 & \text{si } \nu_t < k \end{cases}$$

et on pose $Z_k^t = \varepsilon(k,t)Y_k$. (On remarquera que $\varepsilon(k,t)$ est bien défini car $\sigma_k > 0$ lorsque $\nu_t = k$.)

(a) Vérifier que l'on a $0 \leq \varepsilon(k,t) \leq 1$.

(b) Montrer que $\mathbb{E}[Z_k^t|\mathcal{F}_{k-1}] = 0$.

(c) Montrer qu'à t fixé le processus $(Z_k^t)_{k\geq 1}$ est $(\mathcal{F}_k)_{k\geq 1}$-adapté.

4. On pose pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\tau_{k,t} = (\mathbb{E}[(Z_k^t)^2|\mathcal{F}_{k-1}])^{1/2}.$$

(a) Montrer que $\tau_{k,t}^2 = \varepsilon(k,t)^2\sigma_k^2$.

(b) Montrer que $|Z_k^t|^3 \leq K(Z_k^t)^2$ et $\tau_{k,t}^3 \leq K\tau_{k,t}^2$.

(c) Montrer que

$$\forall t > 0 \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2 = t$$

(d) Montrer pour tout entier n et pour tout $t > 0$, la variable aléatoire

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t}^2$$

est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$, on pose

$$T_n^t = \sum_{1\leq k\leq n} Z_k^t + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t} N_k \tag{3}$$

(a) Vérifier que la série (3) est bien convergente.

(b) Montrer que pour tout réel s, on a

$$\mathbb{E}[e^{i\frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}}|\mathcal{F}_\infty] = \exp(-\frac{s^2}{2}).$$

Indication: on pourra utiliser la question 4(c).
Quelle est la loi de $\frac{T_0^t}{\sqrt{t}}$?

6. Montrer que pour tout $t > 0$ et tout s réel, on a

$$|\mathbb{E}e^{i\frac{sT_{\nu_t}^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_0^t}{\sqrt{t}}}| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\mathbb{E}e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}|.$$

7. Soit $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha_{n,t} & = & \exp(\frac{is}{\sqrt{t}} \sum_{k=1}^{n-1} Z_k^t) \\ \beta_{n,t} & = & \exp(\frac{is}{\sqrt{t}} Z_n^t) - \exp(\frac{is}{\sqrt{t}}\tau_{n,t}N_n) \\ \gamma_{n,t} & = & \exp\left(\frac{is}{\sqrt{t}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \tau_{k,t}N_k\right) \end{array}\right.$$

On remarquera que

$$e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}} = \alpha_{n,t}\beta_{n,t}\gamma_{n,t}.$$

(a) On note $\mathcal{G}_n = \mathcal{F}_\infty \vee \sigma(N_n)$. Montrer que

$$\mathbb{E}[e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}|\mathcal{G}_n] = \alpha_{n,t}\beta_{n,t}\exp(-\frac{s^2}{2t}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\tau_{k,t}^2).$$

(b) En déduire que

$$|\mathbb{E}\big(e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}\big)| \leq \mathbb{E}|\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}]|.$$

Indication: on pourra remarquer que $\alpha_{n,t}$ est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.

(c) Montrer que

$$|\mathbb{E}[\beta_{n,t}|\mathcal{F}_{n-1}]| \leq \frac{|s|^3}{6t^{3/2}}(\mathbb{E}|Z_n^t|^3 + \mathbb{E}|\tau_{n,t}N_n|^3)$$

Indication: on pourra utiliser sans démonstation la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad |e^{ix} - (1 + ix - \frac{1}{2}x^2)| \leq \frac{|x|^3}{6}.$$

(d) Montrer que

$$|\mathbb{E}e^{i\frac{sT_n^t}{\sqrt{t}}} - \mathbb{E}e^{i\frac{sT_{n-1}^t}{\sqrt{t}}}| \leq \frac{|s|^3}{6t^{3/2}}K(1 + \mathbb{E}|N_0|^3)\mathbb{E}\tau_{n,t}^2.$$

8. En utilisant les questions précédentes, montrer que

$$\frac{T_{\nu_t}}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

9. Pour tout $t > 0$, établir l'identité

$$T_{\nu_t} + (1 - \varepsilon(\nu_t, t))Y_{\nu_t} = X_{\nu_t}.$$

10. Montrer enfin que

$$\frac{X_{\nu_t}}{\sqrt{t}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1).$$

FIN