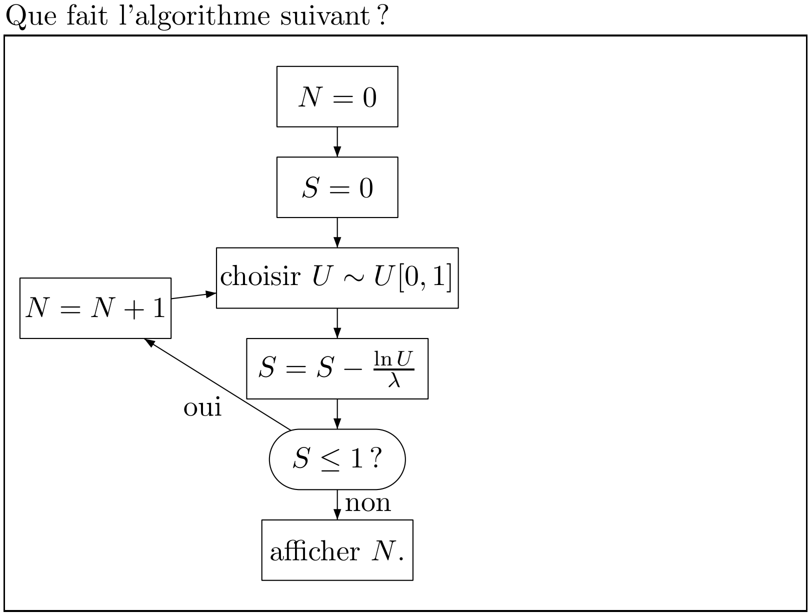
DEVOIR MAISON FACULTATIF pour le 25 avril 2019

DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Probabilités et Statistiques Semestre : 6	Durée du sujet : temps libre Nom du rédacteur : O. GARET

Exercice 1 *Processus de Poisson.*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi exponentielle de paramètre λ. On pose $S_0 = 0$ et, pour $n \geq 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. Pour $t > 0$, on définit $N_t = \sup\{n \geq 0; S_n < t\}$.

1. Montrer que pour tout entier n strictement positif, la variable aléatoire S_n suit la loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$.
2. Soient $n \geq 1, t > 0$. Montrer que $\mathbb{P}(S_n < t) = g_n(\lambda t)$, où on a posé
$$g_n(t) = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^t x^{n-1} e^{-x}\, dx,$$
puis que $g_{n+1}(t) = -\frac{1}{\Gamma(n+1)} e^{-t} t^n + g_n(t)$.
3. Montrer que $\mathbb{P}(N_t = n) = \mathbb{P}(S_n < t) - \mathbb{P}(S_{n+1} < t)$. En déduire que N_t suit la loi de Poisson de paramètre λt.
On dit alors que $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ.
4. Soit U une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\lambda > 0$. On pose $Y = -\frac{\ln U}{\lambda}$. Déterminer la loi de Y.
5. Que fait l'algorithme suivant ?



On admet que chaque choix d'un nombre suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$ se fait indépendamment des précédents.

6. On pourra admettre sans démonstration le résultat d'analyse suivant : si $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite telle que pour le réel $\lambda > 0$ on ait $u_n \sim \lambda n$, alors

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\sup\{n \geq 0; u_n \leq t\}}{t} = \frac{1}{\lambda}.$$

   (a) Montrer que $(\frac{S_n}{n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

   (b) Montrer que $\frac{N_t}{t}$ converge presque sûrement et déterminer sa limite.

FIN