SUJET DE CONTRÔLE CONTINU

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : temps libre
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ Documents autorisés
Session ……1……..	☐ Documents non autorisés
Date : pour le 29 avril 2020	☐ Calculatrices autorisées
Horaire :	■ Calculatrice autorisée

Exercice 1

1. Soient X et ε deux variables aléatoires indépendantes, où X suit la loi exponentielle de paramètre 1 et ε la loi de Rademacher : $\mathbb{P}_\varepsilon = \frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.
   On appelle loi de Laplace la loi de εX.

   Montrer que la loi de Laplace est une loi à densité. Calculer son espérance, sa variance.

2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Laplace. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{k^2}$.

   S_n est la somme partielle d'ordre n de la série aléatoire de terme général $\frac{X_k}{k^2}$.

   (a) Pour $k \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(|X_k| \geq 2\log k)$.

   (b) Montrer que la suite S_n converge presque sûrement. On note S la limite (la somme de la série).

   (c) Montrer que S_n converge dans L^2, et que la limite dans L^2 coïncide avec S.

   (d) S est-elle presque sûrement égale à une constante ?

FIN

1 Solutions

Solution 1 1. Soit ψ une fonction continue bornée. On a par indépendance de ε et X

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\psi(\varepsilon X) &= \mathbb{E}[\,\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}}\psi(X) + \mathbb{1}_{\{\varepsilon=-1\}}\psi(-X)] \\
&= \mathbb{E}[\,\mathbb{1}_{\{\varepsilon=1\}}]\mathbb{E}[\psi(X)] + \mathbb{E}[\,\mathbb{1}_{\{\varepsilon=-1\}}]\mathbb{E}[\psi(-X)] \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}[\psi(X)] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[\psi(-X)] \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\psi(x)\, d\lambda(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\psi(-x)\, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\psi(x)\, d\lambda(x) + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}_-} e^{x}\psi(x)\, d\lambda(x) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} e^{-|x|}\psi(x)\, d\lambda(x).
\end{aligned}$$

Cela entraîne que εX admet la densité $x \mapsto \frac{1}{2}e^{-|x|}$.
Comme ε et X sont indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(\varepsilon X) = \mathbb{E}(\varepsilon)\mathbb{E}(X) = 0.\mathbb{E}(X) = 0.$$

On a $(\varepsilon X)^2 = X^2$, donc $\mathbb{E}((\varepsilon X)^2) = \mathbb{E}(X^2) = 2$ (voir correction du devoir du 10 avril, ou intégration par partie). On a alors $\mathrm{Var}(\varepsilon X) = 2 - 0^2 = 2$.

2. (a) Par définition de la loi de Laplace, si X suit la loi de Laplace, pour $a \geq 0$, on a $\mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{P}(Y \geq a)$, où $Y \sim \mathcal{E}(1)$. Ainsi, $\mathbb{P}(|X| \geq a) = \mathbb{P}(Y \geq a) = e^{-a}$. En particulier $\mathbb{P}(|X_k| \geq 2\log k) = e^{-(2\log k)} = \frac{1}{k^2}$.

   (b) D'après ce qui précède, la série de terme général $\mathbb{P}(|X_k| \geq 2\log k)$ converge, donc d'après le premier lemme de Borel–Cantelli, pour presque tout ω, il existe $n(\omega)$ avec $|X_k(\omega)| < 2\log k$ pour $k > n(\omega)$. Ainsi, presque sûrement, pour k assez grand $\frac{|X_k|}{k^2} \leq \frac{2\log k}{k^2}$, ce qui entraîne la convergence absolue de la série, puisque $\frac{2\log k}{k^2}$ est le terme général d'une série convergente (par exemple car $\frac{2\log k}{k^2} = o(k^{-1,5})$).

   (c) Comme $\|\frac{X_k}{k^2}\|_2 = \frac{\|X_k\|_2}{k^2} = \frac{\sqrt{2}}{k^2}$, la série de terme général $\frac{X_k}{k^2}$ converge normalement dans L^2. Comme L^2 est complet, la série converge dans L^2. La convergence de S_n dans L^2 entraîne la convergence presque sûre d'une sous-suite : par unicité de la limite presque sûre, la limite presque sûre et la limite dans L^2 coïncident.

   (d) S_n converge dans L^2 vers S ; l'application $x \mapsto \|x\|_2^2$ étant continue, on a $\|S\|_2^2 = \lim \|S_n\|_2^2$, soit $\mathbb{E}(S^2) = \lim \mathbb{E}(S_n^2)$. La convergence dans L^2 entraîne la convergence dans L^1, qui elle-même entraîne la convergence des espérances : on a $\mathbb{E}(S) = \lim \mathbb{E}(S_n)$. En faisant la différence, on obtient $\mathrm{Var}(S) = \lim \mathrm{Var}(S_n)$. Mais l'indépendance des X_k entraîne

$$\mathrm{Var} S_n = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(\frac{X_k}{k^2}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^4}\mathrm{Var}(X_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^4} \geq 2,$$

et à la limite $\mathrm{Var}(S) \geq 2 > 0$, ce qui montre que S n'est pas constante.