DEVOIR MAISON FACULTATIF pour le 13 février 2020

DIPLOME : Licence de Mathématiques UE : Probabilités et Statistiques Semestre : 6	Durée du sujet : temps libre Nom du rédacteur : O. GARET

Exercice 1 *Développement d'un nombre dans une base*
Une question importante en probabilité est celle de l'existence d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sur lequel vivent une suite de variables indépendantes ? La réponse, positive, est donnée par le théorème suivant :

Théorème 1 *On considère l'espace probabilisé*

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1[, \mathcal{B}([0,1[), \lambda_{|[0,1[}).$$

Soit $g \geq 2$ un entier. On pose $X_0^g(\omega) = \omega$. On définit les variables A_i^g et X_i^g par les récurrences $X_i^g = \{gX_{i-1}^g\}$ et $A_i^g = \lfloor gX_i^g \rfloor$. Alors, pour tout $\omega \in [0,1[$, on a

$$\omega = X_0(\omega) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A_i^g(\omega)}{g^{i+1}} \text{ avec } A_i^g \in \{0, 1, \dots, g-1\}.$$

Pour tout $\omega \in \Omega$, la suite $(A_i^g(\omega))_{i\geq 0}$ contient une infinité de termes différents de $g-1$: c'est le développement g-adique de ω. La suite $(A_i^g)_{i\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{0, \dots, g-1\}$. En particulier, pour $g = 2$, $(A_i^g)_{i\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de Bernoulli de paramètre $1/2$.

Le but principal de l'exercice est de démontrer ce théorème. On exhibera ensuite un ensemble intéressant non-dénombrable de mesure de Lebesgue nulle.

Dans ce qui suit, sauf dans la dernière question, g sera un entier fixé, et on s'autorise à ne pas écrire les exposants g pour simplifier les écritures.

1. Montrer que la suite des X_i prend ses valeurs dans $[0,1[$ et que la suite $(A_i)_{i\geq 0}$ prend ses valeurs dans $\{0, \dots, g-1\}$.
2. Quel nom donne-t-on couramment à la loi de X_0 ?
3. Montrer que pour tout couple d'entiers (j, n) avec $\leq j \leq n$, on a

$$\sum_{i=j}^{n} \frac{A_i}{g^{i+1}} = \frac{X_j}{g^j} - \frac{X_{n+1}}{g^{n+1}}.$$

(On pourra faire apparaître une somme télescopique.)

4. En déduire que pour tout $\omega \in [0,1[$, on a

$$\omega = X_0(\omega) = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{A_i(\omega)}{g^{i+1}} \text{ avec } A_i \in \{0, 1, \dots, g-1\}.$$

5. Montrer que $\underline{\lim}_{i\geq 1}\{A_i = g-1\} = \varnothing$.
6. Montrer que tout réel ω de $[0,1[$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$\omega = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{a_i}{g^{i+1}},$$
où a_i est une suite d'éléments de $\{0, \dots, g-1\}$ dont une infinité de termes diffèrent de $g-1$.
7. Soit J un borélien de $[0,1[$ et n un entier naturel non nul. Montrer que, pour $(b_0, \dots, b_{n-1}) \in \{0, \dots, g-1\}^n$, on a
$$\{A_{n-1} = b_{n-1}, X_n \in J\} = \left\{X_{n-1} \in \frac{J + b_{n-1}}{g}\right\}.$$
8. Montrer par récurrence que pour tout n, on a H_n :
— $(A_0, \dots, A_n)$ et X_{n+1} sont indépendants
— $(A_0, \dots, A_n)$ suit la loi uniforme sur $\{0, \dots, g-1\}^{n+1}$
— X_{n+1} suit la loi uniforme sur $[0,1]$.
9. Montrer enfin que la suite $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $\{0, \dots, g-1\}$.
10. Montrer que $\mathbb{P}(\exists n \geq 1; A_n = 1) = 1$.
11. On pose $Y = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{2A_i^2}{3^{i+1}}$. Montrer que Y prend ses valeurs dans un borélien K non-dénombrable tel que $\lambda(K) = 0$.

    Note culturelle : K est l'*ensemble de Cantor*, et la fonction de répartition de Y est connue sous le nom d'*escalier du diable.*

FIN