Probabilités et statistique

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

La convergence presque sûre, partie 1

Pourquoi le presque sûr

Même quand l'espace d'états est raisonnable, il existe des événements non vides de probabilité nulle, et donc des ensembles différents de Ω de probabilité 1.

Pourquoi le presque sûr

Même quand l'espace d'états est raisonnable, il existe des événements non vides de probabilité nulle, et donc des ensembles différents de Ω de probabilité 1.
On a vu en DM un ensemble infini non dénombrable inclus dans $[0,1]$, l'ensemble de Cantor tel que si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, $\mathbb{P}(U \in K) = 0$.

Pourquoi le presque sûr

Même quand l'espace d'états est raisonnable, il existe des événements non vides de probabilité nulle, et donc des ensembles différents de Ω de probabilité 1.
On a vu en DM un ensemble infini non dénombrable inclus dans $[0, 1]$, l'ensemble de Cantor tel que si $U \sim \mathcal{U}([0, 1])$, $\mathbb{P}(U \in K) = 0$. En revanche $\mathbb{P}(U \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = 1$.

Pourquoi le presque sûr

Même quand l'espace d'états est raisonnable, il existe des événements non vides de probabilité nulle, et donc des ensembles différents de Ω de probabilité 1.

On a vu en DM un ensemble infini non dénombrable inclus dans $[0,1]$, l'ensemble de Cantor tel que si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, $\mathbb{P}(U \in K) = 0$. En revanche $\mathbb{P}(U \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) = 1$.

Dans le *DM*, on avait vu aussi que la probabilité que la suite des chiffres du développement de U en base 10 contiennent un $\ll 1 \gg$valait 1.

Pourquoi le presque sûr

Même quand l'espace d'états est raisonnable, il existe des événements non vides de probabilité nulle, et donc des ensembles différents de Ω de probabilité 1.
On a vu en DM un ensemble infini non dénombrable inclus dans $[0,1]$, l'ensemble de Cantor tel que si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$, $\mathbb{P}(U \in K) = 0$. En revanche $\mathbb{P}(U \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}) = 1$.
Dans le *DM*, on avait vu aussi que la probabilité que la suite des chiffres du développement de U en base 10 contiennent un « 1 »valait 1. Pourtant la possibilité de ne pas avoir de 1 n'est pas quelque chose d'extravagant. Par exemple $\frac{2}{9}$ n'a aucun 1 dans son développement décimal

$$\frac{2}{9} = 0,2222222\ldots$$

Convergence presque sûre – notations

$$X_n \to X \quad \mathbb{P} - p.s. \iff \mathbb{P}(X_n \to X) = 1$$

et

$$\{X_n \to X\} = \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

Convergence presque sûre – notations

$$X_n \to X \quad \mathbb{P}-p.s. \iff \mathbb{P}(X_n \to X) = 1$$

et

$$\{X_n \to X\} = \{\omega \in \Omega; X_n(\omega) \to X(\omega)\}.$$

Mais au fait
$\{X_n \to X\}$ est-il bien dans $\mathcal{F}$?

Rappels d'analyse

$$X_n \to X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |X_n - X| \leq \varepsilon \text{ à partir d'un certain rang}$$

$$X_n \to X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |X_n - X| \le \varepsilon \text{ à partir d'un certain rang}$$

Heu, à partir d'un certain rang, est-ce bien rigoureux ?

Rappels d'analyse

$$X_n \to X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |X_n - X| \leq \varepsilon \text{ à partir d'un certain rang}$$

Heu, à partir d'un certain rang, est-ce bien rigoureux ? $\mathcal{P}_n$ à partir d'un certain rang signifie :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad \mathcal{P}_k$$

Rappels d'analyse

$$X_n \to X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |X_n - X| \leq \varepsilon \text{ à partir d'un certain rang}$$

Heu, à partir d'un certain rang, est-ce bien rigoureux ? $\mathcal{P}_n$ à partir d'un certain rang signifie :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \quad \mathcal{P}_k$$

Si A_n est l'événement « $\mathcal{P}_n$ est vérifié »(sous-entendu pour ω), les $\forall$ se traduisant par des $\cap$ et les $\exists$ par des $\cup$, alors $\mathcal{P}_n$ à partir d'un certain rang s'écrit :

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{k \geq n} A_k, \text{ que l'on note } \varliminf_{n \to +\infty} A_n$$

$$X_n \to X \iff \forall \varepsilon > 0 \quad |X_n - X| \le \varepsilon \text{ à partir d'un certain rang}$$

Heu, à partir d'un certain rang, est-ce bien rigoureux ? $\mathcal{P}_n$ à partir d'un certain rang signifie :

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \ge n \quad \mathcal{P}_k$$

Si A_n est l'événement « $\mathcal{P}_n$ est vérifié »(sous-entendu pour ω), les $\forall$ se traduisant par des $\cap$ et les $\exists$ par des $\cup$, alors $\mathcal{P}_n$ à partir d'un certain rang s'écrit :

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \quad \bigcap_{k\ge n} \; A_k, \text{ que l'on note } \varliminf_{n\to+\infty} \; A_n$$

D'après les propriétés de stabilité dénombrable des tribus, si les A_k sont dans la tribu $\mathcal{F}$, leur liminf aussi

Alors on a fini ?

$$\{X_n \to X\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \underline{\lim}_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < \varepsilon\}$$

Alors on a fini ?

$$\{X_n \to X\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \underline{\lim}_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < \varepsilon\}$$

Pas tout à fait : l'intersection n'est pas dénombrable.

Alors on a fini ?

$$\{X_n \to X\} = \bigcap_{\varepsilon>0} \varliminf_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < \varepsilon\}$$

Pas tout à fait : l'intersection n'est pas dénombrable.
Heureusement

$$\{X_n \to X\} = \bigcap_{k\geq 1} \varliminf_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}$$

La clef de l'égalité, c'est que la suite d'événements est monotone (croissante) en ε. Cette fois-ci, la réunion est dénombrable, et donc $\{X_n \to X\}$ est bien un événement.

Complémentaire

Souvent, pour montrer qu'un évènement est de probabilité 1, il est plus facile de montrer que le complémentaire est de probabilité 0, car il est plus naturel de majorer des probabilités (ou plus généralement, des nombres) que de les majorer.

Complémentaire

Souvent, pour montrer qu'un évènement est de probabilité 1, il est plus facile de montrer que le complémentaire est de probabilité 0, car il est plus naturel de majorer des probabilités (ou plus généralement, des nombres) que de les majorer. Ainsi

$$\complement\{X_n \to 0\} = \complement \bigcap_{k\ge 1} \underline{\lim}_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}$$
$$= \bigcup_{k\ge 1} \complement \underline{\lim}_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}$$

Complémentaire

Souvent, pour montrer qu'un évènement est de probabilité 1, il est plus facile de montrer que le complémentaire est de probabilité 0, car il est plus naturel de majorer des probabilités (ou plus généralement, des nombres) que de les majorer. Ainsi

$$\complement\{X_n \to 0\} = \complement \bigcap_{k\ge 1} \varliminf_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}$$

$$= \bigcup_{k\ge 1} \complement \varliminf_{n\to+\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}$$

Or

$$\complement \varliminf_{n\to+\infty} A_n = \complement \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{j\ge n} A_j$$

Complémentaire

Souvent, pour montrer qu'un évènement est de probabilité 1, il est plus facile de montrer que le complémentaire est de probabilité 0, car il est plus naturel de majorer des probabilités (ou plus généralement, des nombres) que de les majorer. Ainsi

$$\complement\{X_n \to 0\} = \complement \bigcap_{k \geq 1} \underline{\lim}_{n \to +\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}$$

$$= \bigcup_{k \geq 1} \complement \underline{\lim}_{n \to +\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}$$

Or

$$\complement \underline{\lim}_{n \to +\infty} A_n = \complement \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \geq n} A_j$$

$$= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement \bigcap_{j \geq n} A_j$$

Complémentaire

Souvent, pour montrer qu'un évènement est de probabilité 1, il est plus facile de montrer que le complémentaire est de probabilité 0, car il est plus naturel de majorer des probabilités (ou plus généralement, des nombres) que de les majorer.Ainsi

$$\begin{aligned}\complement\{X_n \to 0\} &= \complement \bigcap_{k \ge 1} \underline{\lim}_{n \to +\infty} \{|X_n - X| < 1/k\} \\ &= \bigcup_{k \ge 1} \complement \underline{\lim}_{n \to +\infty} \{|X_n - X| < 1/k\}\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\complement \underline{\lim}_{n \to +\infty} A_n &= \complement \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \bigcap_{j \ge n} A_j \\ &= \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \complement \bigcap_{j \ge n} A_j = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \bigcup_{j \ge n} \complement A_j\end{aligned}$$

À partir d'un certain rang

On reconnait une vieille connaissance, car

$$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq n} B_j$$

signifie « pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $j \geq n$, $\omega \in B_j$ », autrement dit « ω est dans B_n pour une infinité d'entiers n. » On note

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq n} B_j = \overline{\lim_{n\to+\infty}} B_n = \{B_n \text{ infiniment souvent}\} = \{B_n \text{ i.s}\}.$$

À partir d'un certain rang

On reconnait une vieille connaissance, car

$$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq n} B_j$$

signifie « pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $j \geq n$, $\omega \in B_j$ », autrement dit « ω est dans B_n pour une infinité d'entiers n. » On note

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{j\geq n} B_j = \overline{\lim_{n\to+\infty}} B_n = \{B_n \text{ infiniment souvent}\} = \{B_n \text{ i.s}\}.$$

On a montré

$$\complement \overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to+\infty}} \complement A_n,$$

autrement dit

$$\complement\{A_n;\ \text{pour } n \text{ assez grand}\} = \{\complement A_n \text{ i.s.}\}$$

Finalement

$$\complement\{X_n \to X\} = \cup_{k\geq 1}\{|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}\}$$

Finalement

$$\complement\{X_n \to X\} = \cup_{k\geq 1}\{|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}\}$$

On a maintenant l'équivalence

1. X_n converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers X
2. $\mathbb{P}(\cup_{k\geq 1}\{|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}\}) = 0$
3. $\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}) = 0$
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.s.}) = 0$

L'équivalence entre (1) et (4) constitue le critère fondamental de convergence presque sûre.

Finalement

$$\complement\{X_n \to X\} = \cup_{k\geq 1}\{|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}\}$$

On a maintenant l'équivalence

1. X_n converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers X
2. $\mathbb{P}(\cup_{k\geq 1}\{|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}\}) = 0$
3. $\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}) = 0$
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.s.}) = 0$

L'équivalence entre (1) et (4) constitue le critère fondamental de convergence presque sûre.

Finalement

$$\complement\{X_n \to X\} = \cup_{k\geq 1}\{|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}\}$$

On a maintenant l'équivalence

1. X_n converge $\mathbb{P}$-presque sûrement vers X
2. $\mathbb{P}(\cup_{k\geq 1}\{|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}\}) = 0$
3. $\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > 1/k \text{ i.s.}) = 0$
4. $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon \text{ i.s.}) = 0$

L'équivalence entre (1) et (4) constitue le critère fondamental de convergence presque sûre.

Si on pose $N=\sum_{k=1}^{+\infty} 1\!\!1_{A_k}$, on a $\{A_n \text{ i.s.}\}=\{N=+\infty\}$. Comme tout est positif,

$$\mathbb{E}(N)=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{E}(1\!\!1_{A_k})=\sum_{k=1}^{+\infty}\mathbb{P}(A_k).$$

Lemme de Borel-Cantelli

Si on pose $N = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}$, on a $\{A_n \text{ i.s.}\} = \{N = +\infty\}$. Comme tout est positif,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{E}(N) < +\infty$$

Si on pose $N = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}$, on a $\{A_n \text{ i.s.}\} = \{N = +\infty\}$. Comme tout est positif,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) < +\infty &\Longrightarrow \mathbb{E}(N) < +\infty \\ &\Longrightarrow \mathbb{P}(N = +\infty) = 0 \end{aligned}$$

Lemme de Borel-Cantelli

Si on pose $N = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_k}$, on a $\{A_n \text{ i.s.}\} = \{N = +\infty\}$. Comme tout est positif,

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{A_k}) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

On en déduit

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{E}(N) < +\infty$$
$$\Longrightarrow \mathbb{P}(N = +\infty) = 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 0.$$

C'est le (premier) lemme de Borel–Cantelli

2e lemme de Borel-Cantelli

Ici, les A_k sont indépendants et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$.

2e lemme de Borel-Cantelli

Ici, les A_k sont indépendants et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$.

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\underline{\lim} \complement A_k) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k^c)$$

2e lemme de Borel-Cantelli

Ici, les A_k sont indépendants et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$.

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\underline{\lim} \complement A_k) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k^c)$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $N \geq n$, on a

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) \leq \mathbb{P}(\cap_{k=n}^N A_k^c) = \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

2e lemme de Borel-Cantelli

Ici, les A_k sont indépendants et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$.

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\underline{\lim} \complement A_k) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k^c)$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $N \geq n$, on a

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) \leq \mathbb{P}(\cap_{k=n}^N A_k^c) = \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

$$\leq \prod_{k=n}^N \exp(-\mathbb{P}(A_k)) = \exp(-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k))$$

2e lemme de Borel-Cantelli

Ici, les A_k sont indépendants et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$.

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\underline{\lim} \complement A_k) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k^c)$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $N \geq n$, on a

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) \leq \mathbb{P}(\cap_{k=n}^N A_k^c) = \prod_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^N (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

$$\leq \prod_{k=n}^N \exp(-\mathbb{P}(A_k)) = \exp(-\sum_{k=n}^N \mathbb{P}(A_k))$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient que la probabilité à gauche est nulle.

2e lemme de Borel-Cantelli

Ici, les A_k sont indépendants et $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_k) = +\infty$.

$$\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = \mathbb{P}(\overline{\lim_{n\to+\infty}} A_n)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\underline{\lim} \complement A_k) = 1 - \mathbb{P}(\bigcup_{n\geq 1} \bigcap_{k\geq n} A_k^c)$$

Pour tout $n \geq 1$ et tout $N \geq n$, on a

$$\mathbb{P}(\bigcap_{k\geq n} A_k^c) \leq \mathbb{P}(\cap_{k=n}^{N} A_k^c) = \prod_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k^c) = \prod_{k=n}^{N} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

$$\leq \prod_{k=n}^{N} \exp(-\mathbb{P}(A_k)) = \exp(-\sum_{k=n}^{N} \mathbb{P}(A_k))$$

En faisant tendre N vers l'infini, on obtient que la probabilité à gauche est nulle.Finalement, par réunion dénombrable $\mathbb{P}(\underline{\lim} \complement A_k) = 0$, d'où $\mathbb{P}(A_n \text{ i.s.}) = 1$. C'est le 2ème lemme de Borel–Cantelli.

- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $X_n \sim \text{ber}(p_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_n pour que X_n tende presque sûrement vers 0.

- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $X_n \sim \text{ber}(p_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_n pour que X_n tende presque sûrement vers 0.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, intégrables. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0. (Penser à la fonction de queue).

- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $X_n \sim \text{ber}(p_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_n pour que X_n tende presque sûrement vers 0.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, intégrables. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0. (Penser à la fonction de queue).

- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $X_n \sim \mathrm{ber}(p_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_n pour que X_n tende presque sûrement vers 0.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, intégrables. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0. (Penser à la fonction de queue).
- exercice 83 du polycopié (convergence presque complète).

- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $X_n \sim \text{ber}(p_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_n pour que X_n tende presque sûrement vers 0.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, intégrables. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0. (Penser à la fonction de queue).
- exercice 83 du polycopié (convergence presque complète).
- exercice 84 du polycopié (avec Markov et les moments exponentiels).

- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, avec $X_n \sim \text{ber}(p_n)$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les p_n pour que X_n tende presque sûrement vers 0.
- Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires de même loi, intégrables. Montrer que $\frac{X_n}{n}$ tend presque sûrement vers 0. (Penser à la fonction de queue).
- exercice 83 du polycopié (convergence presque complète).
- exercice 84 du polycopié (avec Markov et les moments exponentiels).
- Si vous êtes en forme, vous pouvez piocher dans 69,74,75,78,79,85.