Probabilités et statistique

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

La convergence presque sûre, partie 3

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1.

« Opérations » sur les convergences

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1. Dès lors, une preuve de convergence presque sûre est souvent un assemblage

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1. Dès lors, une preuve de convergence presque sûre est souvent un assemblage

- de briques probabilistes d'événements de probabilité 1, obtenus par des outils plus ou moins sophistiqués :

« Opérations » sur les convergences

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1. Dès lors, une preuve de convergence presque sûre est souvent un assemblage

- de briques probabilistes d'événements de probabilité 1, obtenus par des outils plus ou moins sophistiqués :
  - hypothèses !

« Opérations » sur les convergences

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1. Dès lors, une preuve de convergence presque sûre est souvent un assemblage

- de briques probabilistes d'événements de probabilité 1, obtenus par des outils plus ou moins sophistiqués :
  - hypothèses !
  - Borel–Cantelli

« Opérations » sur les convergences

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1. Dès lors, une preuve de convergence presque sûre est souvent un assemblage

- de briques probabilistes d'événements de probabilité 1, obtenus par des outils plus ou moins sophistiqués :
    - hypothèses !
    - Borel–Cantelli
    - Loi des grands nombres

« Opérations » sur les convergences

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1. Dès lors, une preuve de convergence presque sûre est souvent un assemblage

- de briques probabilistes d'événements de probabilité 1, obtenus par des outils plus ou moins sophistiqués :
    - hypothèses !
    - Borel–Cantelli
    - Loi des grands nombres
- par des raisonnements d'analyse

« Opérations » sur les convergences

On sait qu'une intersection finie ou dénombrable d'événements de probabilité un est de probabilité 1. Dès lors, une preuve de convergence presque sûre est souvent un assemblage

- de briques probabilistes d'événements de probabilité 1, obtenus par des outils plus ou moins sophistiqués :
    - hypothèses !
    - Borel–Cantelli
    - Loi des grands nombres
- par des raisonnements d'analyse

Le plus simple : si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} Y$, alors $X_n + Y_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X + Y$

Un exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Étudier le comportement lorsque n tend vers l'infini de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{X_{k+1} + \cdots + X_{k+n}}{n}.$$

Un exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Étudier le comportement lorsque n tend vers l'infini de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{X_{k+1} + \cdots + X_{k+n}}{n}.$$

Ici, une preuve possible passe par les briques probabilistes

Un exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Étudier le comportement lorsque n tend vers l'infini de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{X_{k+1}+\dots+X_{k+n}}{n}.$$

Ici, une preuve possible passe par les briques probabilistes

- $\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_{k+1}+\dots+X_{k+n}}{n} \to \frac{1}{2}\right) = 1$

Un exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Étudier le comportement lorsque n tend vers l'infini de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{X_{k+1}+\dots+X_{k+n}}{n}.$$

Ici, une preuve possible passe par les briques probabilistes

- $\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_{k+1}+\dots+X_{k+n}}{n} \to \frac{1}{2}\right) = 1$

et la brique « analytique »

Un exemple

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Étudier le comportement lorsque n tend vers l'infini de

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \frac{X_{k+1} + \dots + X_{k+n}}{n}.$$

Ici, une preuve possible passe par les briques probabilistes

- $\forall k \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_{k+1} + \dots + X_{k+n}}{n} \to \frac{1}{2} \right) = 1$

et la brique « analytique »

- La convergence dominée des séries.

La convergence en probabilité

Plus délicate à combiner que la convergence presque sûre On a

- L'epsilonnage.

La convergence en probabilité

Plus délicate à combiner que la convergence presque sûre On a

- L'epsilonnage. Simple dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de familles de variables en jeu. Par exemple, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Yn \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, on a $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$ car pout tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\|(X_n, Y_n) - (X, Y)\|_\infty \geq \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \varepsilon\}) \\
&\leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon)
\end{aligned}$$

La convergence en probabilité

Plus délicate à combiner que la convergence presque sûre On a

- L'epsilonnage. Simple dans le cas où il n'y a qu'un nombre fini de familles de variables en jeu. Par exemple, si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Yn \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, on a $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$ car pout tout $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(\|(X_n, Y_n) - (X, Y)\|_\infty \geq \varepsilon) \\
&= \mathbb{P}(\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \cup \{|Y_n - Y| \geq \varepsilon\}) \\
&\leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon)
\end{aligned}$$

- Les sous-suites :

Lemme

Pour que $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, il suffit que pour tout $I \subset \mathbb{N}$ avec I infini, il existe $J \subset I$ avec J infini et $X_n \underset{n \in J, n \to +\infty}{\overset{p.s}{\to}} X$. Autrement dit, il suffit que de toute sous-suite de (X_n) on puisse réextraire une sous-suite qui converge presque sûrement vers X.

Preuve

Preuve : soit (X_n) une telle suite. Soit $\varepsilon > 0$. On note

$$a = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon).$$

Preuve

Preuve : soit (X_n) une telle suite. Soit $\varepsilon > 0$. On note $a = \overline{\lim}_{n \to +\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$.$a$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, donc il existe I tel que

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n \in I, n \to +\infty}{\to} a.$$

Preuve

Preuve : soit (X_n) une telle suite. Soit $\varepsilon > 0$. On note $a = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$. a est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, donc il existe I tel que

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n \in I, n \to +\infty}{\to} a.$$

Par hypothèse, existe $J \subset I$ avec J infini et $X_n \underset{n \in J, n \to +\infty}{\overset{p.s}{\to}} X$.

Preuve

Preuve : soit (X_n) une telle suite. Soit $\varepsilon > 0$. On note $a = \overline{\lim_{n\to+\infty}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$.$a$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, donc il existe I tel que

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n\in I, n\to+\infty}{\to} a.$$

Par hypothèse, existe $J \subset I$ avec J infini et $X_n \underset{n\in J, n\to+\infty}{\overset{p.s}{\to}} X$.

$\xrightarrow{\text{p.s.}}$ entraîne $\xrightarrow{\mathbb{P}}$, donc $X_n \underset{n\in J, n\to+\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$, ce qui entraîne que $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n\in J, n\to+\infty}{\to} 0$.

Preuve

Preuve : soit (X_n) une telle suite. Soit $\varepsilon > 0$. On note $a = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$.$a$ est la plus grande valeur d'adhérence de la suite $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon)$, donc il existe I tel que

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n \in I, n \to +\infty}{\to} a.$$

Par hypothèse, existe $J \subset I$ avec J infini et $X_n \underset{n \in J, n \to +\infty}{\overset{p.s}{\to}} X$. $\xrightarrow{\text{p.s.}}$ entraîne $\xrightarrow{\mathbb{P}}$, donc $X_n \underset{n \in J, n \to +\infty}{\overset{\mathbb{P}}{\to}} X$, ce qui entraîne que $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \underset{n \in J, n \to +\infty}{\to} 0$.Comme $J \subset I$, $a = 0$.

Convergence en probabilité et continuité

Théorème

Si (X_n) converge en probabilité vers X, et que X prend presque sûrement ses valeurs dans un ouvert O sur lequel ϕ est continue, alors $\phi(X_n)$ converge en probabilité vers $\phi(X)$.

Convergence en probabilité et continuité

Théorème

Si (X_n) converge en probabilité vers X, et que X prend presque sûrement ses valeurs dans un ouvert O sur lequel ϕ est continue, alors $\phi(X_n)$ converge en probabilité vers $\phi(X)$.

Preuve : Soit $I \subset \mathbb{N}$.

- La sous-suite des $(X_n)_{n\in I}$ converge elle aussi en probabilité vers X, donc on peut en extraire une sous-suite de $(X_n)_{n\in J}$, qui converge presque sûrement vers X.

Convergence en probabilité et continuité

Théorème

Si (X_n) converge en probabilité vers X, et que X prend presque sûrement ses valeurs dans un ouvert O sur lequel ϕ est continue, alors $\phi(X_n)$ converge en probabilité vers $\phi(X)$.

Preuve : Soit $I \subset \mathbb{N}$.

- La sous-suite des $(X_n)_{n\in I}$ converge elle aussi en probabilité vers X, donc on peut en extraire une sous-suite de $(X_n)_{n\in J}$, qui converge presque sûrement vers X.
- Par continuité, la suite $(\phi(X_n))_{n\in J}$, converge presque sûrement vers $\phi(X)$.

Convergence en probabilité et continuité

Théorème

Si (X_n) converge en probabilité vers X, et que X prend presque sûrement ses valeurs dans un ouvert O sur lequel ϕ est continue, alors $\phi(X_n)$ converge en probabilité vers $\phi(X)$.

Preuve : Soit $I \subset \mathbb{N}$.

- La sous-suite des $(X_n)_{n\in I}$ converge elle aussi en probabilité vers X, donc on peut en extraire une sous-suite de $(X_n)_{n\in J}$, qui converge presque sûrement vers X.
- Par continuité, la suite $(\phi(X_n))_{n\in J}$, converge presque sûrement vers $\phi(X)$.

Ceci montre bien que de toute sous-suite de $\phi(X_n)$, on peut extraire une sous-suite qui tend vers $\phi(X)$: ainsi $\phi(X_n)$ converge en probabilité vers $\phi(X)$.

Simple et à ne pas oublier

Si (A et B) entraîne R, et que A et B arrivent souvent, alors R arrive souvent.

Simple et à ne pas oublier

Si (A et B) entraîne R, et que A et B arrivent souvent, alors R arrive souvent.
Formalisation : « (A et B) entraîne R » se traduit par $A \cap B \subset R$.

Si (A et B) entraîne R, et que A et B arrivent souvent, alors R arrive souvent.
Formalisation : « (A et B) entraîne R » se traduit par $A \cap B \subset R$.
On a donc $\complement(A \cap B) \supset R^c$ et

Simple et à ne pas oublier

Si (A et B) entraîne R, et que A et B arrivent souvent, alors R arrive souvent.
Formalisation : « (A et B) entraîne R » se traduit par $A \cap B \subset R$.
On a donc $\complement(A \cap B) \supset R^c$ et

$$\mathbb{P}(R^c) \leq \mathbb{P}(\complement(A \cap B))$$

Si (A et B) entraîne R, et que A et B arrivent souvent, alors R arrive souvent.
Formalisation : « (A et B) entraîne R » se traduit par $A \cap B \subset R$.
On a donc $\complement(A \cap B) \supset R^c$ et

$$\mathbb{P}(R^c) \leq \mathbb{P}(\complement(A \cap B)) = \mathbb{P}(A^c \cup B^c)$$

Simple et à ne pas oublier

Si (A et B) entraîne R, et que A et B arrivent souvent, alors R arrive souvent.
Formalisation : « (A et B) entraîne R » se traduit par $A \cap B \subset R$.
On a donc $\complement(A \cap B) \supset R^c$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R^c) \le \mathbb{P}(\complement(A \cap B)) &= \mathbb{P}(A^c \cup B^c) \\ &\le \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

Simple et à ne pas oublier

Si (A et B) entraîne R, et que A et B arrivent souvent, alors R arrive souvent.
Formalisation : « (A et B) entraîne R » se traduit par $A \cap B \subset R$.
On a donc $\complement(A \cap B) \supset R^c$ et

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(R^c) \le \mathbb{P}(\complement(A \cap B)) &= \mathbb{P}(A^c \cup B^c)\\ &\le \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c)\end{aligned}$$

Par exemple $|X| \le \varepsilon/2$ et $|Y| \le \varepsilon/2$ entraînent $|X + Y| \le \varepsilon$, donc

$$\mathbb{P}(|X + Y| > \varepsilon) \le \mathbb{P}(|X| > \varepsilon/2) + \mathbb{P}(|Y| > \varepsilon/2)$$

.

Grandes déviations

Grandes déviations

Théorème

Soit (X_n) *une suite de variables positives, i.i.d. ; on suppose qu'il existe* $\beta > 0$*, avec* $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$*.*
Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$*, il existe* $q < 1$ *tel que pour tout* $n \geq 1$*,*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Théorème

Soit (X_n) *une suite de variables positives, i.i.d. ; on suppose qu'il existe* $\beta > 0$*, avec* $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$.
Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$*, il existe* $q < 1$ *tel que pour tout* $n \geq 1$*,*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Preuve : pour tout $\alpha > 0$, on a, avec $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) = \mathbb{P}(S_n > na)$$

Grandes déviations

Théorème

Soit (X_n) une suite de variables positives, i.i.d. ; on suppose qu'il existe $\beta > 0$, avec $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$.
Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$, il existe $q < 1$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Preuve : pour tout $\alpha > 0$, on a, avec $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) = \mathbb{P}(S_n > na) = \mathbb{P}(e^{\alpha S_n} > e^{\alpha na})$$

Grandes déviations

Théorème

Soit (X_n) une suite de variables positives, i.i.d. ; on suppose qu'il existe $\beta > 0$, avec $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$.
Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$, il existe $q < 1$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Preuve : pour tout $\alpha > 0$, on a, avec $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) &= \mathbb{P}(S_n > na) = \mathbb{P}(e^{\alpha S_n} > e^{\alpha na}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{\alpha S_n})e^{-na\alpha}\end{aligned}$$

Théorème

Soit (X_n) une suite de variables positives, i.i.d. ; on suppose qu'il existe $\beta > 0$, avec $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$.
Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$, il existe $q < 1$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Preuve : pour tout $\alpha > 0$, on a, avec $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) &= \mathbb{P}(S_n > na) = \mathbb{P}(e^{\alpha S_n} > e^{\alpha na}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{\alpha S_n})e^{-na\alpha} = (\mathbb{E}(e^{\alpha X_1})e^{-\alpha a})^n\end{aligned}$$

On veut $\mathbb{E}(e^{\alpha X_1})e^{-\alpha a} < 1$!

Grandes déviations

Théorème

Soit (X_n) une suite de variables positives, i.i.d. ; on suppose qu'il existe $\beta > 0$, avec $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$.
Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$, il existe $q < 1$ tel que pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Preuve : pour tout $\alpha > 0$, on a, avec $S_n = X_1 + \cdots + X_n$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) &= \mathbb{P}(S_n > na) = \mathbb{P}(e^{\alpha S_n} > e^{\alpha na}) \\ &\leq \mathbb{E}(e^{\alpha S_n})e^{-na\alpha} = (\mathbb{E}(e^{\alpha X_1})e^{-\alpha a})^n\end{aligned}$$

On veut $\mathbb{E}(e^{\alpha X_1})e^{-\alpha a} < 1$! On pose
$f(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} \, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$.

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;

Grandes déviations – preuve par une intégrale à paramètre

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$|\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha x}| = xe^{\alpha x} = \frac{2}{\beta}\frac{\beta x}{2}e^{\alpha x} \le \frac{2}{\beta}e^{\beta/2x}e^{\beta/2x} = \frac{2}{\beta}e^{\beta x};$$

Grandes déviations – preuve par une intégrale à paramètre

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$|\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha x}| = xe^{\alpha x} = \frac{2}{\beta}\frac{\beta x}{2}e^{\alpha x} \leq \frac{2}{\beta}e^{\beta/2x}e^{\beta/2x} = \frac{2}{\beta}e^{\beta x};$$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\beta}e^{\beta x}\ d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(\frac{2}{\beta}e^{\beta X_1}) < +\infty.$

Grandes déviations – preuve par une intégrale à paramètre

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$|\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x}| = x e^{\alpha x} = \frac{2}{\beta} \frac{\beta x}{2} e^{\alpha x} \le \frac{2}{\beta} e^{\beta/2x} e^{\beta/2x} = \frac{2}{\beta} e^{\beta x};$$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\beta} e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(\frac{2}{\beta} e^{\beta X_1}) < +\infty.$

Ainsi, sur $]-\beta/2, \beta/2[$, $f : \alpha \mapsto \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$ est C^1, avec

$$f'(\alpha) = \mathbb{E}(X_1 e^{\alpha X_1}).$$

Grandes déviations – preuve par une intégrale à paramètre

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$|\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x}| = x e^{\alpha x} = \frac{2}{\beta} \frac{\beta x}{2} e^{\alpha x} \le \frac{2}{\beta} e^{\beta/2x} e^{\beta/2x} = \frac{2}{\beta} e^{\beta x};$$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\beta} e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(\frac{2}{\beta} e^{\beta X_1}) < +\infty$.

Ainsi, sur $]-\beta/2, \beta/2[$, $f : \alpha \mapsto \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$ est C^1, avec

$$f'(\alpha) = \mathbb{E}(X_1 e^{\alpha X_1}).$$

En particulier $f'(0) = \mathbb{E}(X_1)$. Ainsi, au voisinage de 0

Grandes déviations – preuve par une intégrale à paramètre

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$|\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x}| = x e^{\alpha x} = \frac{2}{\beta} \frac{\beta x}{2} e^{\alpha x} \leq \frac{2}{\beta} e^{\beta/2x} e^{\beta/2x} = \frac{2}{\beta} e^{\beta x};$$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\beta} e^{\beta x} \, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(\frac{2}{\beta} e^{\beta X_1}) < +\infty$.

Ainsi, sur $]-\beta/2, \beta/2[$, $f : \alpha \mapsto \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$ est C^1, avec

$$f'(\alpha) = \mathbb{E}(X_1 e^{\alpha X_1}).$$

En particulier $f'(0) = \mathbb{E}(X_1)$. Ainsi, au voisinage de 0

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X_1}) e^{-a\alpha} = f(\alpha) e^{-a\alpha}$$

Grandes déviations – preuve par une intégrale à paramètre

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$|\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha x}| = xe^{\alpha x} = \frac{2}{\beta}\frac{\beta x}{2}e^{\alpha x} \le \frac{2}{\beta}e^{\beta/2x}e^{\beta/2x} = \frac{2}{\beta}e^{\beta x};$$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\beta}e^{\beta x}\, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(\frac{2}{\beta}e^{\beta X_1}) < +\infty.$

Ainsi, sur $]-\beta/2, \beta/2[$, $f : \alpha \mapsto \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$ est C^1, avec

$$f'(\alpha) = \mathbb{E}(X_1 e^{\alpha X_1}).$$

En particulier $f'(0) = \mathbb{E}(X_1)$. Ainsi, au voisinage de 0

$$\mathbb{E}(e^{\alpha X_1})e^{-a\alpha} = f(\alpha)e^{-a\alpha} = (1 + f'(0)\alpha + o(\alpha))(1 - a\alpha + o(\alpha))$$

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$\left|\frac{d}{d\alpha} e^{\alpha x}\right| = x e^{\alpha x} = \frac{2}{\beta}\frac{\beta x}{2} e^{\alpha x} \le \frac{2}{\beta} e^{\beta/2 x} e^{\beta/2 x} = \frac{2}{\beta} e^{\beta x};$$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\beta} e^{\beta x}\, d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(\frac{2}{\beta} e^{\beta X_1}) < +\infty$.

Ainsi, sur $]-\beta/2, \beta/2[$, $f : \alpha \mapsto \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$ est C^1, avec

$$f'(\alpha) = \mathbb{E}(X_1 e^{\alpha X_1}).$$

En particulier $f'(0) = \mathbb{E}(X_1)$. Ainsi, au voisinage de 0

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\alpha X_1}) e^{-a\alpha} &= f(\alpha) e^{-a\alpha} = (1 + f'(0)\alpha + o(\alpha))(1 - a\alpha + o(\alpha)) \\ &= 1 + (\mathbb{E}(X_1) - a)\alpha + o(\alpha)\end{aligned}$$

- Pour tout x réel $\alpha \mapsto e^{\alpha x}$ est C^1 sur $]-\beta/2, \beta/2[$;
- Pour $|\alpha| < \beta/2$, on a pour $\mathbb{P}$-presque tout x.

$$|\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha x}| = xe^{\alpha x} = \frac{2}{\beta}\frac{\beta x}{2}e^{\alpha x} \le \frac{2}{\beta}e^{\beta/2x}e^{\beta/2x} = \frac{2}{\beta}e^{\beta x};$$

- $\int_{\mathbb{R}} \frac{2}{\beta}e^{\beta x}\ d\mathbb{P}_{X_1}(x) = \mathbb{E}(\frac{2}{\beta}e^{\beta X_1}) < +\infty$.

Ainsi, sur $]-\beta/2, \beta/2[$, $f : \alpha \mapsto \mathbb{E}(e^{\alpha X_1})$ est C^1, avec

$$f'(\alpha) = \mathbb{E}(X_1 e^{\alpha X_1}).$$

En particulier $f'(0) = \mathbb{E}(X_1)$. Ainsi, au voisinage de 0

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{\alpha X_1})e^{-a\alpha} &= f(\alpha)e^{-a\alpha} = (1 + f'(0)\alpha + o(\alpha))(1 - a\alpha + o(\alpha)) \\ &= 1 + (\mathbb{E}(X_1) - a)\alpha + o(\alpha) \\ &< 1 \text{ pour } \alpha > 0 \text{ assez petit.}\end{aligned}$$

Grandes déviations – généralisation

Théorème

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. intégrables ; avec $\beta > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$. Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$, il existe $q < 1$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Grandes déviations – généralisation

Théorème

Soit (X_n) *une suite de v.a.i.i.d. intégrables ; avec* $\beta > 0$ *tel que* $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$. *Alors, pour tout* $a > \mathbb{E}(X_1)$, *il existe* $q < 1$ *tel que*

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Théorème

Soit (X_n) *une suite de v.a.i.i.d. ; avec* $\beta > 0$ *tel que* $\mathbb{E}(e^{\beta|X_1|}) < +\infty$. *Alors, pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $q < 1$ *tel que*

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| > \varepsilon\right) \leq 2q^n.$$

Théorème

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. intégrables ; avec $\beta > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\beta X_1}) < +\infty$. Alors, pour tout $a > \mathbb{E}(X_1)$, il existe $q < 1$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} > a\right) \leq q^n.$$

Théorème

Soit (X_n) une suite de v.a.i.i.d. ; avec $\beta > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\beta|X_1|}) < +\infty$. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $q < 1$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mathbb{E}(X_1)\right| > \varepsilon\right) \leq 2q^n.$$

Corollaire

Sous les hypothèses précédentes, $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \xrightarrow{p.c.} \mathbb{E}(X_1)$