Probabilités et statistique

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

La convergence presque sûre, partie 2

La plupart des cas de convergence presque sûr qu'on a vus en exercices sont des cas particuliers de convergence presque complète.

Convergence presque complète

La plupart des cas de convergence presque sûr qu'on a vus en exercices sont des cas particuliers de convergence presque complète.

Théorème

On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge presque complètement vers* X *si quel que soit* $\varepsilon > 0$*, la série de terme général* $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ *converge. La convergence presque complète entraîne la convergence presque sûre.*

Convergence en probabilité

On dit que X_n converge en probabilité vers X si quel que soit $\varepsilon > 0$, la suite de terme général $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ tend vers 0.

On dit que X_n converge en probabilité vers X si quel que soit $\varepsilon > 0$, la suite de terme général $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ tend vers 0.
On écrit alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Convergence en probabilité

On dit que X_n converge en probabilité vers X si quel que soit $\varepsilon > 0$, la suite de terme général $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ tend vers 0.

On écrit alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

On a

- $X_n \xrightarrow{\text{p.c.}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$
- $X_n \xrightarrow{\text{p.c.}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

On dit que X_n converge en probabilité vers X si quel que soit $\varepsilon > 0$, la suite de terme général $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon)$ tend vers 0.

On écrit alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

On a

- $X_n \xrightarrow{\text{p.c.}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$
- $X_n \xrightarrow{\text{p.c.}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$.

Peut-on comparer $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$?

La convergence presque sûre entraîne la convergence en proba

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre,

$$0 = \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ i.s.}\right)$$

La convergence presque sûre entraîne la convergence en proba

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ i.s.}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\} \right) \end{aligned}$$

La convergence presque sûre entraîne la convergence en proba

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ i.s.}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{k \geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\} \right) \end{aligned}$$

La suite $A_n = \bigcup_{k \geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\}$ est décroissante. Donc, d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante, on a

$$0 = \lim \mathbb{P}(A_n).$$

Mais $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \subset A_n$

La convergence presque sûre entraîne la convergence en proba

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ i.s.}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\} \right) \end{aligned}$$

La suite $A_n = \bigcup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\}$ est décroissante. Donc, d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante, on a

$$0 = \lim \mathbb{P}(A_n).$$

Mais $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \subset A_n$ donc $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_n)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

La convergence presque sûre entraîne la convergence en proba

Soit $\varepsilon > 0$. D'après le critère fondamental de convergence presque sûre,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbb{P}\left(|X_n - X| \geq \varepsilon \text{ i.s.}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\geq 1} \bigcup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\} \right) \end{aligned}$$

La suite $A_n = \bigcup_{k\geq n} |X_k - X| \geq \varepsilon\}$ est décroissante. Donc, d'après le théorème de continuité séquentielle décroissante, on a

$$0 = \lim \mathbb{P}(A_n).$$

Mais $\{|X_n - X| \geq \varepsilon\} \subset A_n$ donc $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(A_n)$ et

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) = 0.$$

Comme ε est quelconque, on conclut que X_n converge en probabilité vers X.

La réciproque est fausse

Prendre pour X_n une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \mathrm{Ber}(1/n)$.

La réciproque est fausse

Prendre pour X_n une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \mathrm{Ber}(1/n)$.Pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n \to 0$. Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

La réciproque est fausse

Prendre pour X_n une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \text{Ber}(1/n)$.Pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n \to 0$. Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Mais $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$

La réciproque est fausse

Prendre pour X_n une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \text{Ber}(1/n)$.Pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n \to 0$. Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Mais $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$ donc avec le premier lemme de Borel–Cantelli, avec probabilité 1, la suite X_n prend une infinité de fois la valeur 1 donc ne tend pas vers 0.

La réciproque est fausse

Prendre pour X_n une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \text{Ber}(1/n)$.Pour tout $\varepsilon > 0$, on a $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \le \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n \to 0$. Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Mais $\sum_{n \ge 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n \ge 1} \frac{1}{n} = +\infty$ donc avec le premier lemme de Borel–Cantelli, avec probabilité 1, la suite X_n prend une infinité de fois la valeur 1 donc ne tend pas vers 0.

La convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence presque sûre.

La réciproque est fausse

Prendre pour X_n une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \text{Ber}(1/n)$.Pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n \to 0$. Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Mais $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$ donc avec le premier lemme de Borel–Cantelli, avec probabilité 1, la suite X_n prend une infinité de fois la valeur 1 donc ne tend pas vers 0.

La convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence presque sûre.

Cependant, si on pose $\phi(n) = n^2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{\phi(n)} \neq 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n^2} = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

et avec le lemme de Borel–Cantelli, $X_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.

La réciproque est fausse

Prendre pour X_n une suite de variables aléatoires indépendantes avec $X_n \sim \text{Ber}(1/n)$.Pour tout $\varepsilon > 0$, on a
$\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(X_n = 1) = 1/n \to 0$. Donc $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Mais $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(X_n = 1) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = +\infty$ donc avec le premier lemme de Borel–Cantelli, avec probabilité 1, la suite X_n prend une infinité de fois la valeur 1 donc ne tend pas vers 0.

La convergence en probabilité n'entraîne pas la convergence presque sûre.

Cependant, si on pose $\phi(n) = n^2$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{\phi(n)} \neq 0) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X_{n^2} = 1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty$$

et avec le lemme de Borel–Cantelli, $X_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.
Ceci est général : toute suite qui converge en probabilité a une sous-suite qui converge presque sûrement.

Preuve

On s'appuie sur un lemme :

Lemme

Si $a_n \to 0$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > a_n) < +\infty$, *alors* $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

Preuve

On s'appuie sur un lemme :

Lemme

Si $a_n \to 0$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > a_n) < +\infty$, *alors* $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

C'est une conséquence simple de Borel-Cantelli.

Preuve

On s'appuie sur un lemme :

Lemme

Si $a_n \to 0$ *et* $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > a_n) < +\infty$, *alors* $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

C'est une conséquence simple de Borel-Cantelli.
On pose $\phi(1) = 1$, puis

$$\phi(n+1) = \inf \left\{ k > \phi(n); \mathbb{P}\left(|X_k - X| > \frac{1}{n+1} \right) \leq \frac{1}{(n+1)^2} \right\}$$

Preuve

On s'appuie sur un lemme :

Lemme

Si $a_n \to 0$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > a_n) < +\infty$, alors $X_n \xrightarrow{p.s.} X$.

C'est une conséquence simple de Borel-Cantelli.
On pose $\phi(1) = 1$, puis

$$\phi(n+1) = \inf\left\{k > \phi(n); \mathbb{P}\left(|X_k - X| > \frac{1}{n+1}\right) \le \frac{1}{(n+1)^2}\right\}$$

Par construction

$$\forall n \ge 1 \quad \mathbb{P}\left(|X_{\phi(n)} - X| > \frac{1}{n}\right) \le \frac{1}{n^2}$$

Le lemme s'applique et $X_{\phi(n)} \xrightarrow{\text{p.s.}} X$.

Rappel : inégalité de Markov et compagnie

Théorème (Markov généralisé)

Soit f : une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|)}{f(a)}$

Rappel : inégalité de Markov et compagnie

Théorème (Markov généralisé)

Soit f : une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(|X| \ge a) \le \frac{\mathbb{E}(f(|X|)}{f(a)}$

Preuve : $\{|X| \ge a\} \subset \{f(|X|) \ge f(a)\}$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable $f(|X|)$.

Rappel : inégalité de Markov et compagnie

Théorème (Markov généralisé)

Soit f : une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|)}{f(a)}$

Preuve : $\{|X| \geq a\} \subset \{f(|X|) \geq f(a)\}$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable $f(|X|)$.

Corollaires :

- fixant X : grands moments, petites queues :

Rappel : inégalité de Markov et compagnie

Théorème (Markov généralisé)

Soit f : une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|)}{f(a)}$

Preuve : $\{|X| \geq a\} \subset \{f(|X|) \geq f(a)\}$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable $f(|X|)$.

Corollaires :

- fixant X : grands moments, petites queues :
  - si $X \in L^p$, $P(|X| > t) = O(\frac{1}{t^p})$
  - si $\alpha > 0$ et $\mathbb{E}e^{\alpha|X|} < +\infty$, $P(|X| > t) = O(e^{-\alpha t})$

Rappel : inégalité de Markov et compagnie

Théorème (Markov généralisé)

Soit f : une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|)}{f(a)}$

Preuve : $\{|X| \geq a\} \subset \{f(|X|) \geq f(a)\}$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable $f(|X|)$.

Corollaires :

- fixant X : grands moments, petites queues :
  - si $X \in L^p$, $P(|X| > t) = O(\frac{1}{t^p})$
  - si $\alpha > 0$ et $\mathbb{E}e^{\alpha|X|} < +\infty$, $P(|X| > t) = O(e^{-\alpha t})$
- En fixant a : si $\mathbb{E}(f(|X_n - X|)) \to 0$, X_n tend en probabilité vers X

Rappel : inégalité de Markov et compagnie

Théorème (Markov généralisé)

Soit f : une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(|X| \ge a) \le \frac{\mathbb{E}(f(|X|)}{f(a)}$

Preuve : $\{|X| \ge a\} \subset \{f(|X|) \ge f(a)\}$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable $f(|X|)$.

Corollaires :

- fixant X : grands moments, petites queues :
  - si $X \in L^p$, $P(|X| > t) = O(\frac{1}{t^p})$
  - si $\alpha > 0$ et $\mathbb{E}e^{\alpha|X|} < +\infty$, $P(|X| > t) = O(e^{-\alpha t})$
- En fixant a : si $\mathbb{E}(f(|X_n - X|)) \to 0$, X_n tend en probabilité vers X
- En particulier dès que X_n tend dans L^p vers X,

Rappel : inégalité de Markov et compagnie

Théorème (Markov généralisé)

Soit f : une fonction croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour toute variable aléatoire X, on a $\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}(f(|X|)}{f(a)}$

Preuve : $\{|X| \geq a\} \subset \{f(|X|) \geq f(a)\}$ et on applique l'inégalité de Markov à la variable $f(|X|)$.

Corollaires :

- fixant X : grands moments, petites queues :
  - si $X \in L^p$, $P(|X| > t) = O(\frac{1}{t^p})$
  - si $\alpha > 0$ et $\mathbb{E}e^{\alpha|X|} < +\infty$, $P(|X| > t) = O(e^{-\alpha t})$
- En fixant a : si $\mathbb{E}(f(|X_n - X|)) \to 0$, X_n tend en probabilité vers X
- En particulier dès que X_n tend dans L^p vers X, La convergence dans L^p entraîne la convergence en probabilité.

Limitations

Une suite de variables aléatoires qui n'ont qu'une petite proabilité de ne pas être trop petites à de bonnes chances de tendre vers 0
La taille compte, mais elle ne fait pas tout

Limitations

Une suite de variables aléatoires qui n'ont qu'une petite proabilité de ne pas être trop petites à de bonnes chances de tendre vers 0

La taille compte, mais elle ne fait pas tout

Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose

$$X_n = U_1^n \text{ et } Y_n = U_n^n$$

Limitations

Une suite de variables aléatoires qui n'ont qu'une petite proabilité de ne pas être trop petites à de bonnes chances de tendre vers 0
La taille compte, mais elle ne fait pas tout
Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$X_n = U_1^n \text{ et } Y_n = U_n^n$$

- Pour tout n, X_n et Y_n ont même loi.

Limitations

Une suite de variables aléatoires qui n'ont qu'une petite proabilité de ne pas être trop petites à de bonnes chances de tendre vers 0
La taille compte, mais elle ne fait pas tout
Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$X_n = U_1^n \text{ et } Y_n = U_n^n$$

- Pour tout n, X_n et Y_n ont même loi.
- Donc pour tout $n \geq 1, \varepsilon > 1$ $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$
- Cependant, $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ tandis que $\overline{\lim}\, Y_n = 1 \quad \mathbb{P}$ p.s.

Limitations

Une suite de variables aléatoires qui n'ont qu'une petite proabilité de ne pas être trop petites à de bonnes chances de tendre vers 0
La taille compte, mais elle ne fait pas tout
Soit (U_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. On pose

$$X_n = U_1^n \text{ et } Y_n = U_n^n$$

- Pour tout n, X_n et Y_n ont même loi.
- Donc pour tout $n \geq 1, \varepsilon > 1$ $\mathbb{P}(|X_n| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|Y_n| > \varepsilon)$
- Cependant, $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$ tandis que $\overline{\lim} Y_n = 1 \quad \mathbb{P}$ p.s.

Pour connaître le comportement d'une suite, les lois des marginales ne déterminent pas tout ; les dépendances (ou les indépendances) comptent beaucoup.

Loi faible des grands nombres

Théorème

Soit (X_n) *une suite de variables aléatoires deux à deux non corrélées avec* $C = \sup_{n\geq 1} \mathrm{Var}(X_k) < +\infty$. *On pose* $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.
Alors $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{L^2} 0$

Théorème

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires deux à deux non corrélées avec $C = \sup_{n\geq 1} \operatorname{Var}(X_k) < +\infty$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Alors $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{L^2} 0$ et donc $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

Preuve : $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}$ est centré donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}\right)^2 &= \operatorname{Var}\left(\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n}\right) = \operatorname{Var}\left(\frac{S_n}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\operatorname{Var}(S_n) = \frac{1}{n^2}(\operatorname{Var} X_1 + \dots + \operatorname{Var} X_n) \\
&\leq \frac{Cn}{n^2} = \frac{C}{n}
\end{aligned}$$

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

Loi forte des grands nombres (LFGN)

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

Preuve : on se ramène au cas où $\mathbb{E}(X_n) = 0$.
Si, pour $0 \le i \le j$, on pose $D_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j} X_k$, on a encore.

$$\mathbb{E}(D_{i,j}^2) = \mathrm{Var}\, D_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j} \mathrm{Var}\, X_k \le C(j-i).$$

Loi forte des grands nombres (LFGN)

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, $\frac{S_n - \mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

Preuve : on se ramène au cas où $\mathbb{E}(X_n) = 0$.
Si, pour $0 \le i \le j$, on pose $D_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j} X_k$, on a encore.

$$\mathbb{E}(D_{i,j}^2) = \text{Var } D_{i,j} = \sum_{k=i+1}^{j} \text{Var } X_k \le C(j-i).$$

$$\mathbb{P}(|S_{n^2}| \ge n^{8/5}) \le \frac{\text{Var } S_{n^2}}{n^{16/5}} = \frac{\text{Var } D_{0,n^2}}{n^{16/5}} \le \frac{Cn^2}{n^{16/5}} = \frac{C}{n^{6/5}}.$$

Loi forte des grands nombres (LFGN)

Théorème

Sous les mêmes hypothèses, $\frac{S_n-\mathbb{E}(S_n)}{n} \xrightarrow{p.s.} 0$

Preuve : on se ramène au cas où $\mathbb{E}(X_n)=0$.
Si, pour $0 \le i \le j$, on pose $D_{i,j}=\sum_{k=i+1}^{j} X_k$, on a encore.

$$\mathbb{E}(D_{i,j}^2)=\text{Var } D_{i,j}=\sum_{k=i+1}^{j} \text{Var } X_k \le C(j-i).$$

$$\mathbb{P}(|S_{n^2}| \ge n^{8/5}) \le \frac{\text{Var } S_{n^2}}{n^{16/5}}=\frac{\text{Var } D_{0,n^2}}{n^{16/5}} \le \frac{Cn^2}{n^{16/5}}=\frac{C}{n^{6/5}}.$$

Avec Borel-Cantelli, $\mathbb{P}$-p.s. $|S_{n^2}| \le n^{8/5}=(n^2)^{4/5}$ pour n assez grand.

LFGN – suite de la preuve

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On pose $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. On a $n - 2\sqrt{n} \leq (\sqrt{n} - 1)^2 \leq p(n) \leq n$

LFGN – suite de la preuve

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On pose $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. On a $n - 2\sqrt{n} \leq (\sqrt{n} - 1)^2 \leq p(n) \leq n$
On a $p(n) \to +\infty$, donc $\mathbb{P}$-p.s. :

LFGN – suite de la preuve

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On pose $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. On a $n - 2\sqrt{n} \leq (\sqrt{n} - 1)^2 \leq p(n) \leq n$
On a $p(n) \to +\infty$, donc $\mathbb{P}$-p.s. :

$$|S_{p(n)}| \leq p(n)^{4/5} \leq n^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On pose $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. On a $n - 2\sqrt{n} \leq (\sqrt{n} - 1)^2 \leq p(n) \leq n$
On a $p(n) \to +\infty$, donc $\mathbb{P}$-p.s. :

$$|S_{p(n)}| \leq p(n)^{4/5} \leq n^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

$$\mathbb{P}(|S_n - S_{p(n)}| \geq n^{4/5}) \leq \frac{\operatorname{Var} D_{n,p(n)}}{n^{8/5}} \leq \frac{C(n - p(n))}{n^{8/5}} \leq \frac{2C\sqrt{n}}{n^{8/5}} = \frac{2C}{n^{11/10}}$$

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On pose $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. On a $n - 2\sqrt{n} \leq (\sqrt{n} - 1)^2 \leq p(n) \leq n$
On a $p(n) \to +\infty$, donc $\mathbb{P}$-p.s. :

$$|S_{p(n)}| \leq p(n)^{4/5} \leq n^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

$$\mathbb{P}(|S_n - S_{p(n)}| \geq n^{4/5}) \leq \frac{\operatorname{Var} D_{n,p(n)}}{n^{8/5}} \leq \frac{C(n - p(n))}{n^{8/5}} \leq \frac{2C\sqrt{n}}{n^{8/5}} = \frac{2C}{n^{11/10}}$$

Avec Borel–Cantelli, $\mathbb{P}$-p.s. $|S_n - S_{p(n)}| < n^{4/5}$ pour n assez grand

LFGN – suite de la preuve

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On pose $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. On a $n - 2\sqrt{n} \leq (\sqrt{n} - 1)^2 \leq p(n) \leq n$
On a $p(n) \to +\infty$, donc $\mathbb{P}$-p.s. :

$$|S_{p(n)}| \leq p(n)^{4/5} \leq n^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

$$\mathbb{P}(|S_n - S_{p(n)}| \geq n^{4/5}) \leq \frac{\operatorname{Var} D_{n,p(n)}}{n^{8/5}} \leq \frac{C(n - p(n))}{n^{8/5}} \leq \frac{2C\sqrt{n}}{n^{8/5}} = \frac{2C}{n^{11/10}}$$

Avec Borel–Cantelli, $\mathbb{P}$-p.s. $|S_n - S_{p(n)}| < n^{4/5}$ pour n assez grand
et

$$|S_n| \leq |S_n - S_{p(n)}| + |S_{p(n)}| < 2n^{4/5}$$

LFGN – suite de la preuve

On sait que $\mathbb{P}$-p.s.

$$|S_{n^2}| \leq n^{8/5} = (n^2)^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

On pose $p(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^2$. On a $n - 2\sqrt{n} \leq (\sqrt{n} - 1)^2 \leq p(n) \leq n$
On a $p(n) \to +\infty$, donc $\mathbb{P}$-p.s. :

$$|S_{p(n)}| \leq p(n)^{4/5} \leq n^{4/5} \text{ pour } n \text{ assez grand.}$$

$$\mathbb{P}(|S_n - S_{p(n)}| \geq n^{4/5}) \leq \frac{\operatorname{Var} D_{n,p(n)}}{n^{8/5}} \leq \frac{C(n-p(n))}{n^{8/5}} \leq \frac{2C\sqrt{n}}{n^{8/5}} = \frac{2C}{n^{11/10}}$$

Avec Borel–Cantelli, $\mathbb{P}$-p.s. $|S_n - S_{p(n)}| < n^{4/5}$ pour n assez grand et

$$|S_n| \leq |S_n - S_{p(n)}| + |S_{p(n)}| < 2n^{4/5}$$

ce qui entraine que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{p.s.}} 0$.

Le théorème phare

Théorème (Etemadi)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi* μ*. On suppose que* μ *admet un moment d'ordre 1. Alors*

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}X_1.$$

Le théorème phare

Théorème (Etemadi)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi μ. On suppose que μ admet un moment d'ordre 1. Alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}X_1.$$

Remarque : si les X_i sont globalement indépendantes, pas seulement deux à deux indépendantes, il est possible de montrer que la convergence se fait aussi dans L^1.

Le théorème phare

Théorème (Etemadi)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ *une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi* μ. *On suppose que* μ *admet un moment d'ordre 1. Alors*

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\xrightarrow{p.s.}\mathbb{E}X_1.$$

Remarque : si les X_i sont globalement indépendantes, pas seulement deux à deux indépendantes, il est possible de montrer que la convergence se fait aussi dans L^1.
Une remarque simple, mais très utile :

Le théorème phare

Théorème (Etemadi)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi μ. On suppose que μ admet un moment d'ordre 1. Alors

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}X_1.$$

Remarque : si les X_i sont globalement indépendantes, pas seulement deux à deux indépendantes, il est possible de montrer que la convergence se fait aussi dans L^1.
Une remarque simple, mais très utile :si $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi μ et ϕ une application mesurable, la suite $\phi(X_n)$ sera encore une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi : la loi image de μ par ϕ. Si $\phi(X_1)$ est intégrable, on pourra lui appliquer la loi forte des grands nombres.