Probabilités et statistique

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

La convergence en loi, partie 1

Retour sur la LGN

Théorème (Etemadi)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi μ. On suppose que μ admet un moment d'ordre 1. Alors

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}X_1.$$

Retour sur la LGN

Théorème (Etemadi)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes, de même loi μ. On suppose que μ admet un moment d'ordre 1. Alors

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}X_1.$$

Un corollaire :

Corollaire (Méthode de Monte-Carlo)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles deux à deux indépendantes, de même loi μ. Alors pour tout borélien A de $\mathbb{R}$ Alors

$$\frac{1\!\!1_{\{X_1\in A\}}+\dots+1\!\!1_{\{X_n\in A\}}}{n} \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(1\!\!1_{\{X_1\in A\}}) = \mathbb{P}(X_1\in A) = \mu(A).$$

On voulait évaluer la probabilité que $S = d(A,B)^2 \leq 1$, où A et B sont deux points indépendants suivant la loi uniforme sur un carré unitaire.

Simulation

On voulait évaluer la probabilité que $S = d(A, B)^2 \leq 1$, où A et B sont deux points indépendants suivant la loi uniforme sur un carré unitaire.

```
function test(N)
 s=0
 for i=1:N
  a=(rand()-rand())^2  # a=(x_A-x_B)^2
  b=(rand()-rand())^2  # b=(y_A-y_B)^2
  s+=(a+b<1) # +1 pour s si la somme est <1
 end
 return(s/N)
 end
```

On veut faire plus loin : approcher la loi de S

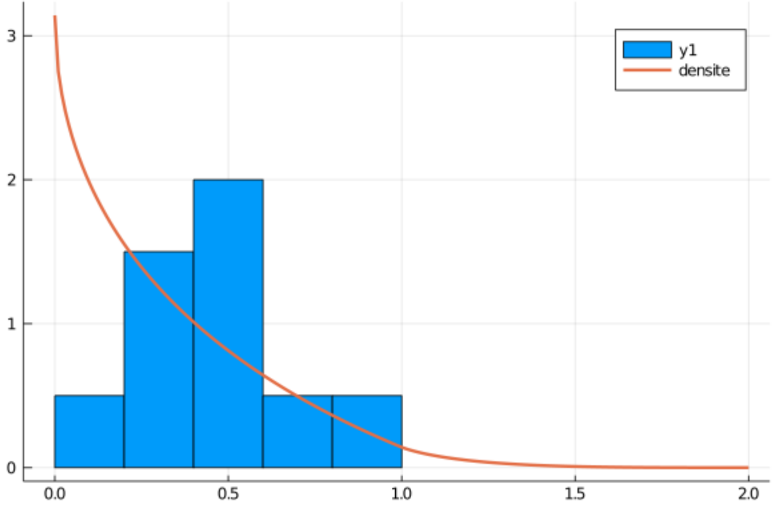
```
using Plots
function carres(N)
a=(rand(N)-rand(N)).^2 ; b=(rand(N)-rand(N)).^2
return(a+b)
end

function densite(t)
if (t<=1) return(pi-4*sqrt(t)+t)
 else return(-2*asin(1-2/t)-4*(1-sqrt(t-1))+2-t)
 end
end

function montre(n)
c=carres(10^n); histogram(c,normalize=true)
plot!(0:0.01:2,densite,linewidth=2,
  label="densite")
end
```

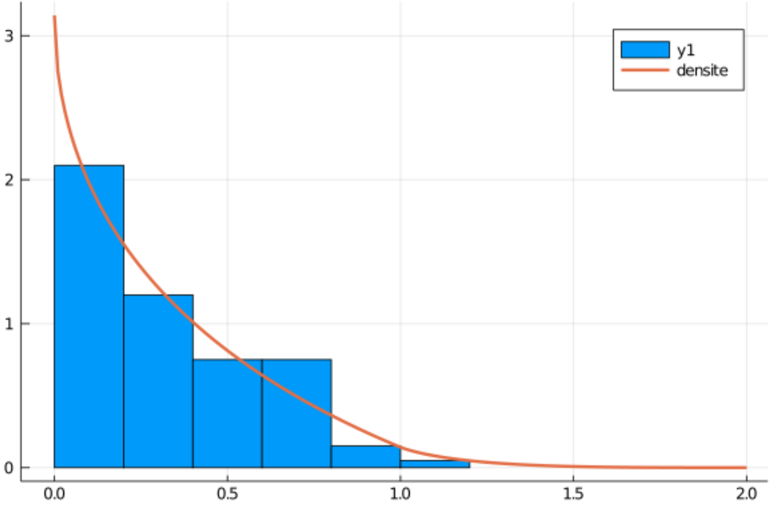
Histogramme : 10 simulations

```
montre(1)
```



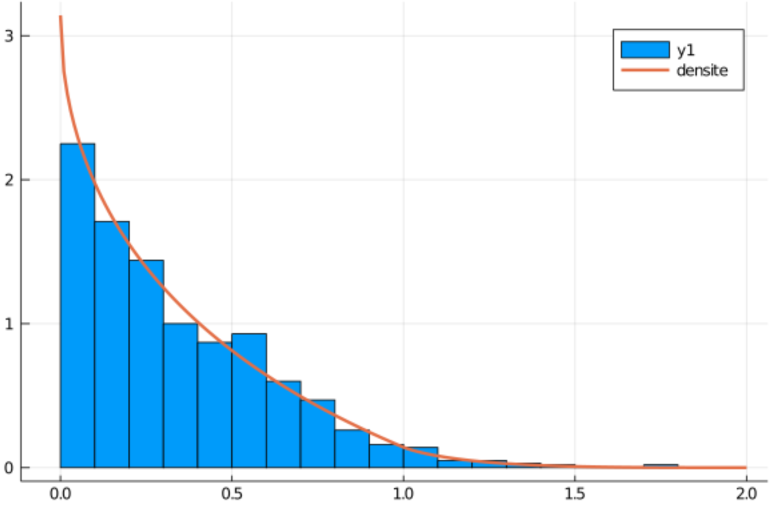
Histogramme : 100 simulations

```
montre(2)
```



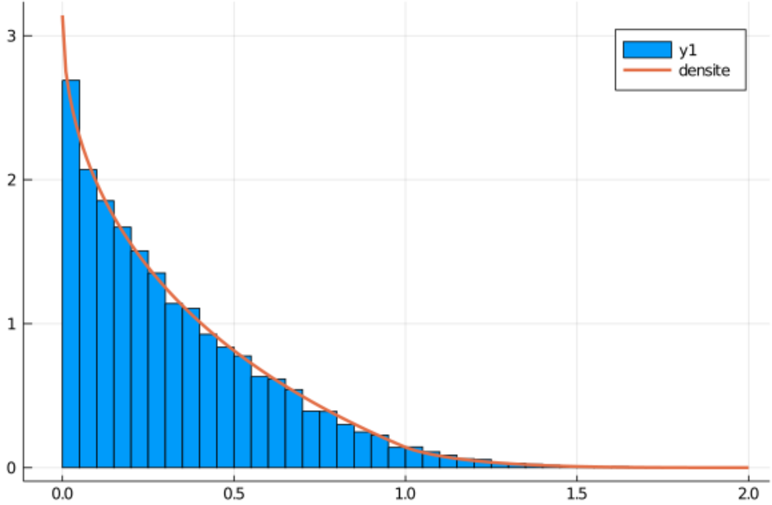
Histogramme : 1000 simulations

```
montre(3)
```



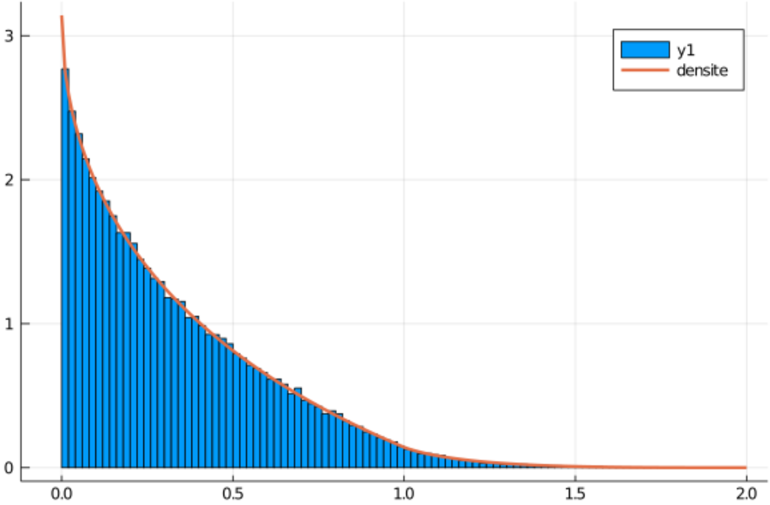
Histogramme : 10 000 simulations

```
montre(4)
```



Histogramme : 100 000 simulations

```
montre(5)
```



Convergence en loi

Problème : il s'agit de comparer une loi discrète (représentée par des bâtons) et une loi continue (représentée par la densité).

Convergence en loi

Problème : il s'agit de comparer une loi discrète (représentée par des bâtons) et une loi continue (représentée par la densité).
On introduit la convergence en loi.

Convergence en loi

Problème : il s'agit de comparer une loi discrète (représentée par des bâtons) et une loi continue (représentée par la densité).
On introduit la convergence en loi.

Définition

Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$, μ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On dit que (μ_n) converge faiblement (ou en loi) vers μ si pour toute fonction f continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \; d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \; d\mu.$$

On écrit $\mu_n \Longrightarrow \mu$.

Convergence en loi

Problème : il s'agit de comparer une loi discrète (représentée par des bâtons) et une loi continue (représentée par la densité).
On introduit la convergence en loi.

Définition

Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$, μ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}^d$. On dit que (μ_n) converge faiblement (ou en loi) vers μ si pour toute fonction f continue bornée de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu.$$

On écrit $\mu_n \Longrightarrow \mu$.

Si (X_n), X sont des variables (vecteurs) aléatoires,

- $X_n \Longrightarrow \mu$ signifie $\mathbb{P}_{X_n} \Longrightarrow \mu$;
- $X_n \Longrightarrow X$ signifie $\mathbb{P}_{X_n} \Longrightarrow \mathbb{P}_X$.

En particulier , $X_n \Longrightarrow X$ si et seulement si pour tout f continue bornée, $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$. En effet

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mathbb{P}_{X_n} = \int_\Omega f(X_n)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(f(X_n)) \text{et} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mathbb{P}_X = \int_\Omega f(X)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(f(X))$$

Corollaire

La convergence presque sûre entraîne la convergence en loi.

Lien avec les autres modes de convergence

En particulier , $X_n \Longrightarrow X$ si et seulement si pour tout f continue bornée, $\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X))$. En effet

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mathbb{P}_{X_n} = \int_\Omega f(X_n)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(f(X_n)) \text{et} \int_{\mathbb{R}^d} f\, d\mathbb{P}_X = \int_\Omega f(X)\, d\mathbb{P} = \mathbb{E}(f(X))$$

Corollaire

La convergence presque sûre entraîne la convergence en loi.

Démonstration.

Si $X_n \xrightarrow{\text{p.s.}} X$, alors pour f continue bornée,

- $f(X_n) \xrightarrow{\text{p.s.}} f(X)$ (continuité)
- $|f(X_n)| \le \|f\|_\infty$
- $\mathbb{E}(\|f\|_\infty) = \|f\|_\infty < +\infty$

Et on conclut avec le théorème de convergence dominée. $\square$

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, *alors* $X_n \Longrightarrow X$.

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, *alors* $X_n \Longrightarrow X$.

Démonstration.

Soit f continue bornée. La suite $\mathbb{E}(f(X_n))$ est bornée.

Théorème

Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, *alors* $X_n \Longrightarrow X$.

Démonstration.

Soit f continue bornée. La suite $\mathbb{E}(f(X_n))$ est bornée.
Soit a une valeur d'adhérence : $a = \lim_{n\in I, n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n))$.

Théorème

Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$*, alors* $X_n \Longrightarrow X$*.*

Démonstration.

Soit f continue bornée. La suite $\mathbb{E}(f(X_n))$ est bornée.
Soit a une valeur d'adhérence : $a = \lim_{n \in I, n \to +\infty} \mathbb{E}(f(X_n))$.

Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $\exists\ J \subset I$, avec $X_n \underset{n \in J, n \to +\infty}{\longrightarrow} X$ p.s..

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$*, alors* $X_n \Longrightarrow X$*.*

Démonstration.

Soit f continue bornée. La suite $\mathbb{E}(f(X_n))$ est bornée.
Soit a une valeur d'adhérence : $a = \lim_{n \in I, n \to +\infty} \mathbb{E}(f(X_n))$.
Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $\exists\ J \subset I$, avec $X_n \underset{n \in J, n \to +\infty}{\longrightarrow} X$ p.s..
D'après ce qui précède $\lim_{n \in J, n \to +\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, *alors* $X_n \Longrightarrow X$.

Démonstration.

Soit f continue bornée. La suite $\mathbb{E}(f(X_n))$ est bornée.
Soit a une valeur d'adhérence : $a = \lim_{n\in I, n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n))$.
Comme $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, $\exists\ J \subset I$, avec $X_n \underset{n\in J, n\to+\infty}{\longrightarrow} X$ p.s..
D'après ce qui précède $\lim_{n\in J, n\to+\infty} \mathbb{E}(f(X_n)) = \mathbb{E}(f(X))$.
Finalement $a = \mathbb{E}(f(X))$. □

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$.

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(\|X_n - a\| > \varepsilon)$$

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(\|X_n - a\| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\arctan \|X_n - a\| > \arctan \varepsilon)$$

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|X_n - a\| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(\arctan \|X_n - a\| > \arctan \varepsilon) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(\arctan \|X_n - a\|)}{\arctan \varepsilon}\end{aligned}$$

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|X_n - a\| > \varepsilon) &\le \mathbb{P}(\arctan \|X_n - a\| > \arctan \varepsilon) \\ &\le \frac{\mathbb{E}(\arctan \|X_n - a\|)}{\arctan \varepsilon}\end{aligned}$$

qui tend vers 0 car $x \mapsto \arctan \|x - a\|$ est continue bornée.

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\|X_n - a\| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(\arctan \|X_n - a\| > \arctan \varepsilon) \\ &\leq \frac{\mathbb{E}(\arctan \|X_n - a\|)}{\arctan \varepsilon}\end{aligned}$$

qui tend vers 0 car $x \mapsto \arctan \|x - a\|$ est continue bornée.

Théorème

Soit g *une fonction continue définie sur* $\mathbb{R}^d$. *Si la suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers* X, *alors la suite* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $Y_n = g(X_n)$ *converge en loi vers* $g(X)$.

Lien avec les autres modes de convergence

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow a$, *alors* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$.

Preuve : soit $\varepsilon > 0$.

$$\mathbb{P}(\|X_n - a\| > \varepsilon) \leq \mathbb{P}(\arctan \|X_n - a\| > \arctan \varepsilon) \leq \frac{\mathbb{E}(\arctan \|X_n - a\|)}{\arctan \varepsilon}$$

qui tend vers 0 car $x \mapsto \arctan \|x - a\|$ est continue bornée.

Théorème

Soit g *une fonction continue définie sur* $\mathbb{R}^d$. *Si la suite* $(X_n)_{n\geq 1}$ *converge en loi vers* X, *alors la suite* $(Y_n)_{n\geq 1}$ *définie par* $Y_n = g(X_n)$ *converge en loi vers* $g(X)$.

Preuve : si f est continue bornée, $f \circ g$ est continue bornée.

Un critère de convergence en loi

Théorème (Lemme de Scheffé)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré ;* $f, (f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *des applications positives intégrables par rapport à* μ *telles que*

a) $f_n \to f \ \mu-p.p.$

b) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu(x) = \int_\Omega f \, d\mu(x).$

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Théorème (Lemme de Scheffé)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré ;* $f, (f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *des applications positives intégrables par rapport à* μ *telles que*

a) $f_n \to f$ μ*−p.p.*

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu(x) = \int_\Omega f \, d\mu(x)$.

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Démonstration.

$$|f - f_n| = f_n - f + 2(f - f_n)\mathbb{1}_{\{f \geq f_n\}}$$

Un critère de convergence en loi

Théorème (Lemme de Scheffé)

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré ;* $f, (f_n)_{n\geq 1} : \Omega \to \mathbb{R}_+$ *des applications positives intégrables par rapport à* μ *telles que*

a) $f_n \to f$ μ*−p.p.*

b) $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu(x) = \int_\Omega f \, d\mu(x)$.

Alors $f_n \xrightarrow{L^1} f$.

Démonstration.

$$|f - f_n| = f_n - f + 2(f - f_n)\mathbb{1}_{\{f \geq f_n\}}$$

- $\int_\Omega f_n - f \, d\mu \to 0$ par linéarité ;
- $\int_\Omega (f - f_n)\mathbb{1}_{\{f\geq f_n\}} \to 0$ par convergence dominée.

□

Convergence en loi pour des lois à densité

Corollaire

Si ν, *et* $(\nu_n)_{n\geq 1}$ *admettent les densités* f *et* $(f_n)_{n\geq 1}$ *par rapport à* μ *et* $f_n \to f$ $\mu-$*p.p. Alors* (ν_n) *converge faiblement vers* ν.

Corollaire

Si ν, et $(\nu_n)_{n\geq 1}$ admettent les densités f et $(f_n)_{n\geq 1}$ par rapport à μ et $f_n \to f$ $\mu-$p.p. Alors (ν_n) converge faiblement vers ν.

Preuve : pour g mesurable bornée (en particulier continue bornée)

$$\begin{aligned}\left|\int g\ d\nu_n - \int g\ d\nu\right| &= \left|\int gf_n\ d\mu - \int gf\ d\mu\right| \\ &\leq \int |g(f_n - f)|\ d\mu \leq \|g\|_\infty \|f_n - f\|_{L^1(\mu)},\end{aligned}$$

Convergence en loi pour des lois à densité

Corollaire

Si ν, et $(\nu_n)_{n\geq 1}$ admettent les densités f et $(f_n)_{n\geq 1}$ par rapport à μ et $f_n \to f$ $\mu-$p.p. Alors (ν_n) converge faiblement vers ν.

Preuve : pour g mesurable bornée (en particulier continue bornée)

$$\left|\int g\ d\nu_n - \int g\ d\nu\right| = \left|\int gf_n\ d\mu - \int gf\ d\mu\right|$$
$$\leq \int |g(f_n - f)|\ d\mu \leq \|g\|_\infty \|f_n - f\|_{L^1(\mu)},$$

Corollaire

Si X, $(X_n)_{n\geq 1}$ sont à valeurs dans D dénombrable et $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in D$, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X.

Corollaire

Si ν, et $(\nu_n)_{n\geq 1}$ admettent les densités f et $(f_n)_{n\geq 1}$ par rapport à μ et $f_n \to f$ $\mu-$p.p. Alors (ν_n) converge faiblement vers ν.

Preuve : pour g mesurable bornée (en particulier continue bornée)

$$\left|\int g\ d\nu_n - \int g\ d\nu\right| = \left|\int gf_n\ d\mu - \int gf\ d\mu\right|$$
$$\leq \int |g(f_n - f)|\ d\mu \leq \|g\|_\infty \|f_n - f\|_{L^1(\mu)},$$

Corollaire

Si X, $(X_n)_{n\geq 1}$ sont à valeurs dans D dénombrable et $\mathbb{P}(X_n = k) \to \mathbb{P}(X = k)$ pour tout $k \in D$, alors $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi vers X.

Preuve : prendre pour μ la mesure de comptage sur D.