Probabilités et statistique

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

La convergence en loi, partie 3

Théorèmes de Lévy : le premier théorème

Théorème

Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$, μ des lois de probabilités. On a équivalence entre

- $\mu_n \Longrightarrow \mu$
- *La suite de fonction ϕ_{μ_n} converge simplement vers ϕ_μ.*

Théorème

Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$, μ des lois de probabilités. On a équivalence entre

- $\mu_n \Longrightarrow \mu$
- *La suite de fonction ϕ_{μ_n} converge simplement vers ϕ_μ.*

ou en version variables (ou vecteurs) aléatoires

Théorème

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, des variables (ou vecteurs) aléatoires, μ une loi. On a équivalence entre

- $\mathbb{P}_{X_n} \Longrightarrow \mu$;
- *La suite de fonction ϕ_{X_n} converge simplement vers ϕ_μ.*

Preuve du premier théorème de Lévy 1/3

Préliminaire : pour toute mesure de proba μ, on sait que pour a, b réels avec $a < b$,

$$\mu(]a,b[) + \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(b)) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\, dt.$$

Preuve du premier théorème de Lévy 1/3

Préliminaire : pour toute mesure de proba μ, on sait que pour a, b réels avec $a < b$,

$$\mu(]a, b[) + \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(b)) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\, dt.$$

Si en plus $\mu(a) = \mu(b) = 0$ et que ϕ_μ est intégrable,

Preuve du premier théorème de Lévy 1/3

Préliminaire : pour toute mesure de proba μ, on sait que pour a, b réels avec $a < b$,

$$\mu(]a,b[) + \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(b)) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\, dt.$$

Si en plus $\mu(a) = \mu(b) = 0$ et que ϕ_μ est intégrable,comme $|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}| \le b - a$, le TCD donne

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\, dt.$$

Preuve du premier théorème de Lévy 1/3

Préliminaire : pour toute mesure de proba μ, on sait que pour a, b réels avec $a < b$,

$$\mu(]a,b[) + \frac{1}{2}(\mu(a)+\mu(b)) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi_\mu(t)\ dt.$$

Si en plus $\mu(a) = \mu(b) = 0$ et que ϕ_μ est intégrable,comme $|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}| \le b-a$, le TCD donne

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi_\mu(t)\ dt.$$

Prenant une suite $([a_n,b_n])_{n\ge1}$ décroissante avec a_n, b_n non chargés par μ, et $[a,b] = \cap_{n\ge1}[a_n,b_n]$,

Preuve du premier théorème de Lévy 1/3

Préliminaire : pour toute mesure de proba μ, on sait que pour a, b réels avec $a < b$,

$$\mu(]a,b[) + \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(b)) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\ dt.$$

Si en plus $\mu(a) = \mu(b) = 0$ et que ϕ_μ est intégrable,comme $|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}| \le b - a$, le TCD donne

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\ dt.$$

Prenant une suite $([a_n, b_n])_{n \ge 1}$ décroissante avec a_n, b_n non chargés par μ, et $[a,b] = \cap_{n \ge 1} [a_n, b_n]$,finalement on a toujours

$$\mu([a,b]) = \lim \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita_n} - e^{-itb_n}}{2i\pi t} \phi_\mu(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{2i\pi t} \phi_\mu(t)\ dt.$$

Preuve du premier théorème de Lévy 1/3

Préliminaire : pour toute mesure de proba μ, on sait que pour a, b réels avec $a < b$,

$$\mu(]a,b[) + \frac{1}{2}(\mu(a) + \mu(b)) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^{T} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\ dt.$$

Si en plus $\mu(a) = \mu(b) = 0$ et que ϕ_μ est intégrable,comme $|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}| \le b - a$, le TCD donne

$$\mu([a,b]) = \mu(]a,b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_\mu(t)\ dt.$$

Prenant une suite $([a_n, b_n])_{n \ge 1}$ décroissante avec a_n, b_n non chargés par μ, et $[a,b] = \cap_{n \ge 1} [a_n, b_n]$,finalement on a toujours

$$\mu([a,b]) = \lim \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita_n} - e^{-itb_n}}{2i\pi t} \phi_\mu(t)\ dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{2i\pi t} \phi_\mu(t)\ dt.$$

En particulier μ ne charge aucun point.

Preuve du premier théorème de Lévy 2/3

Un cas particulier : on traite le cas où il existe il existe une fonction f intégrable avec pour tout n : $|\phi_{\mu_n}| \le f$.

Un cas particulier : on traite le cas où il existe il existe une fonction f intégrable avec pour tout n : $|\phi_{\mu_n}| \leq f$.En particulier μ et les μ_n n'ont pas d'atomes.

Preuve du premier théorème de Lévy 2/3

Un cas particulier : on traite le cas où il existe il existe une fonction f intégrable avec pour tout n : $|\phi_{\mu_n}| \leq f$.En particulier μ et les μ_n n'ont pas d'atomes.Soient a et b avec $a < b$. Pour tout n,

$$\mu_n([a, b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_{\mu_n}(t)\ dt.$$

Un cas particulier : on traite le cas où il existe il existe une fonction f intégrable avec pour tout n : $|\phi_{\mu_n}| \leq f$.En particulier μ et les μ_n n'ont pas d'atomes.Soient a et b avec $a < b$. Pour tout n,

$$\mu_n([a,b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_{\mu_n}(t)\ dt.$$

Comme $|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it} \phi_{\mu_n}(t)| \leq (b-a)f$, le TCD donne

$$\lim \mu_n([a,b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_{\mu}(t)\ dt = \mu([a,b[).$$

Preuve du premier théorème de Lévy 2/3

Un cas particulier : on traite le cas où il existe il existe une fonction f intégrable avec pour tout n : $|\phi_{\mu_n}| \le f$.En particulier μ et les μ_n n'ont pas d'atomes.Soient a et b avec $a < b$. Pour tout n,

$$\mu_n([a,b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_{\mu_n}(t)\ dt.$$

Comme $|\frac{e^{-ita}-e^{-itb}}{it}\phi_{\mu_n}(t)| \le (b-a)f$, le TCD donne

$$\lim \mu_n([a,b[) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-ita} - e^{-itb}}{it} \phi_{\mu}(t)\ dt = \mu([a,b[).$$

On a le résultat voulu avec Portmanteau.

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.L'indépendance donne

$$|\phi_{Y_n}(t)| = |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)|$$

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A-B)$.L'indépendance donne

$$|\phi_{Y_n}(t)| = |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| \leq |\phi_{\delta(A-B)}(t)|$$

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.L'indépendance donne

$$|\phi_{Y_n}(t)| = |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| \leq |\phi_{\delta(A-B)}(t)|$$

$$\leq |\phi_A(\delta t)\phi_B(-\delta t)|$$

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.L'indépendance donne

$$|\phi_{Y_n}(t)| = |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| \leq |\phi_{\delta(A-B)}(t)|$$

$$\leq |\phi_A(\delta t)\phi_B(-\delta t)| = |\phi_A(\delta t)|^2$$

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.L'indépendance donne

$$\begin{aligned}|\phi_{Y_n}(t)| &= |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| \le |\phi_{\delta(A-B)}(t)| \\ &\le |\phi_A(\delta t)\phi_B(-\delta t)| = |\phi_A(\delta t)|^2 = \left(\frac{\sin \delta t/2}{\delta t/2}\right)^2\end{aligned}$$

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.L'indépendance donne

$$\begin{aligned}|\phi_{Y_n}(t)| = |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| &\le |\phi_{\delta(A-B)}(t)| \\ &\le |\phi_A(\delta t)\phi_B(-\delta t)| = |\phi_A(\delta t)|^2 = \left(\frac{\sin \delta t/2}{\delta t/2}\right)^2\end{aligned}$$

Le premier cas donne $Y_n \Longrightarrow Y = X + \delta(A - B)$.

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.L'indépendance donne

$$\begin{aligned}|\phi_{Y_n}(t)| &= |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| \le |\phi_{\delta(A-B)}(t)| \\ &\le |\phi_A(\delta t)\phi_B(-\delta t)| = |\phi_A(\delta t)|^2 = \left(\frac{\sin \delta t/2}{\delta t/2}\right)^2\end{aligned}$$

Le premier cas donne $Y_n \Longrightarrow Y = X + \delta(A - B)$.Alors,

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| \le \mathbb{E}|f(X_n) - \mathbb{E}f(Y_n)| + |\mathbb{E}f(Y_n) - \mathbb{E}f(Y)| \\ + \mathbb{E}|f(Y) - \mathbb{E}f(X)|\end{aligned}$$

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A-B)$.L'indépendance donne

$$\begin{aligned}|\phi_{Y_n}(t)| &= |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| \leq |\phi_{\delta(A-B)}(t)| \\ &\leq |\phi_A(\delta t)\phi_B(-\delta t)| = |\phi_A(\delta t)|^2 = \left(\frac{\sin \delta t/2}{\delta t/2}\right)^2\end{aligned}$$

Le premier cas donne $Y_n \Longrightarrow Y = X + \delta(A-B)$.Alors,

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| &\leq \mathbb{E}|f(X_n) - \mathbb{E}f(Y_n)| + |\mathbb{E}f(Y_n) - \mathbb{E}f(Y)| \\ &+ \mathbb{E}|f(Y) - \mathbb{E}f(X)| \\ &\leq 2\omega_f(\delta) + |\mathbb{E}f(Y_n) - \mathbb{E}f(Y)|\end{aligned}$$

D'où $\overline{\lim}|\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| \leq 2\omega_f(\delta)$.

Preuve du premier théorème de Lévy 3/3

Cas général : soit (X_n), X avec $\phi_{X_n} \to \phi_X$.
On prend A, B i.i.d $\sim \mathcal{U}([0,1])$, indépendantes des X_i et de X.
Soit f u.c. sur $\mathbb{R}$, ω_f son module de continuité, $\delta > 0$.
On pose $Y_n = X_n + \delta(A - B)$.L'indépendance donne

$$\begin{aligned} |\phi_{Y_n}(t)| &= |\phi_{X_n}(t)\phi_{\delta(A-B)}(t)| \leq |\phi_{\delta(A-B)}(t)| \\ &\leq |\phi_A(\delta t)\phi_B(-\delta t)| = |\phi_A(\delta t)|^2 = \left(\frac{\sin \delta t/2}{\delta t/2}\right)^2 \end{aligned}$$

Le premier cas donne $Y_n \Longrightarrow Y = X + \delta(A - B)$.Alors,

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| &\leq \mathbb{E}|f(X_n) - \mathbb{E}f(Y_n)| + |\mathbb{E}f(Y_n) - \mathbb{E}f(Y)| \\ &+ \mathbb{E}|f(Y) - \mathbb{E}f(X)| \\ &\leq 2\omega_f(\delta) + |\mathbb{E}f(Y_n) - \mathbb{E}f(Y)| \end{aligned}$$

D'où $\overline{\lim}|\mathbb{E}f(X_n) - \mathbb{E}f(X)| \leq 2\omega_f(\delta)$.
On fait tendre δ vers 0 et on conclut avec Portmanteau.

Théorèmes de Lévy : le deuxième

Théorème

Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ des lois de probabilités, ϕ une fonction telle que ϕ_{μ_n} converge simplement vers ϕ.
Si, de plus, ϕ est continue en l'origine, alors

- *Il existe une unique mesure de probabilité μ avec $\phi = \phi_\mu$;*
- *Cette mesure est telle que $\mu_n \Longrightarrow \mu$.*

Théorèmes de Lévy : le deuxième

Théorème

Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ des lois de probabilités, ϕ une fonction telle que ϕ_{μ_n} converge simplement vers ϕ.
Si, de plus, ϕ est continue en l'origine, alors

- *Il existe une unique mesure de probabilité μ avec $\phi = \phi_\mu$;*
- *Cette mesure est telle que $\mu_n \Longrightarrow \mu$.*

ou en version variables (ou vecteurs) aléatoires

Théorème

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, des variables (ou vecteurs) aléatoires, ϕ une fonction telle que ϕ_{X_n} converge simplement vers ϕ.
Si, de plus, ϕ est continue en l'origine, alors

- *Il existe une unique mesure de probabilité μ avec $\phi = \phi_\mu$;*
- *Cette mesure est telle que $X_n \Longrightarrow \mu$.*

Théorème

Soient $(\mu_n)_{n\geq 1}$ des lois de probabilités, ϕ une fonction telle que ϕ_{μ_n} converge simplement vers ϕ.
Si, de plus, ϕ est continue en l'origine, alors

- *Il existe une unique mesure de probabilité μ avec $\phi = \phi_\mu$;*
- *Cette mesure est telle que $\mu_n \Longrightarrow \mu$.*

ou en version variables (ou vecteurs) aléatoires

Théorème

Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, des variables (ou vecteurs) aléatoires, ϕ une fonction telle que ϕ_{X_n} converge simplement vers ϕ.
Si, de plus, ϕ est continue en l'origine, alors

- *Il existe une unique mesure de probabilité μ avec $\phi = \phi_\mu$;*
- *Cette mesure est telle que $X_n \Longrightarrow \mu$.*

La preuve utilise des notions avancées (en particularité la tension).

Théorème central limite en dimension 1

Théorème

Soit $(X_n)_n$ *une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On note* m *l'espérance et* σ^2 *la variance communes à ces variables.*

Théorème central limite en dimension 1

Théorème

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance communes à ces variables.Alors,

$$Z_n = \frac{(X_1 + \cdots + X_n) - nm}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

Théorème

Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2. On note m l'espérance et σ^2 la variance communes à ces variables.Alors,

$$Z_n = \frac{(X_1 + \cdots + X_n) - nm}{\sqrt{n}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

(ou encore $\frac{(X_1+\cdots+X_n)-np}{\sqrt{n\sigma^2}} \Longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ *).*

Preuve du TCL 1/2

On pose $S_n = (X_1 + \dots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.

Preuve du TCL 1/2

On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.On a $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.

Preuve du TCL 1/2

On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.On a $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.Notons ϕ la fonction caractéristique de $X_1 - m$.

Preuve du TCL 1/2

On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.On a $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.Notons ϕ la fonction caractéristique de $X_1 - m$. Comme $X_1 - m, \ldots, X_n - m$ sont i.i.d., on a

$$\phi_{Z_n}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

Preuve du TCL 1/2

On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.On a $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.Notons ϕ la fonction caractéristique de $X_1 - m$.
Comme $X_1 - m, \ldots, X_n - m$ sont i.i.d., on a

$$\phi_{Z_n}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k - m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$$

On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.On a $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.Notons ϕ la fonction caractéristique de $X_1 - m$.
Comme $X_1 - m, \ldots, X_n - m$ sont i.i.d., on a

$$\phi_{Z_n}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k - m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Preuve du TCL 1/2

On pose $S_n = (X_1 + \cdots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.On a $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.Notons ϕ la fonction caractéristique de $X_1 - m$.
Comme $X_1 - m, \ldots, X_n - m$ sont i.i.d., on a

$$\phi_{Z_n}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k - m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Comme $\phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t) = \exp(-\frac{\sigma^2}{2}t^2)$, avec le théorème de Lévy, pour montrer que $Z_n \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, il suffit d'avoir

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n \to +\infty} \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t^2\right).$$

Preuve du TCL 1/2

On pose $S_n = (X_1 + \dots + X_n) - nm = \sum_{k=1}^{n} (X_k - m)$.On a $Z_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}}$.Notons ϕ la fonction caractéristique de $X_1 - m$.
Comme $X_1 - m, \dots, X_n - m$ sont i.i.d., on a

$$\phi_{Z_n}(t) = \phi_{S_n}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k - m}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n.$$

Comme $\phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t) = \exp(-\frac{\sigma^2}{2}t^2)$, avec le théorème de Lévy, pour montrer que $Z_n \Longrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, il suffit d'avoir

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad \lim_{n \to +\infty} \phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t^2\right).$$

On peut remarquer que
$\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}t^2\right) = \left(\exp\left(-\frac{\sigma^2 t^2}{2n}\right)\right)^n = \left(\phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(\frac{t}{\sqrt{n}})\right)^n$.

Preuve du TCL 2/2

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right|$$

Preuve du TCL 2/2

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right| \leq n|z-u|.$$

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right| \leq n|z-u|.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left|\phi_{Z_n}(t) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)\right| &= \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\right| \\ &\leq n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Preuve du TCL 2/2

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right| \le n|z-u|.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left|\phi_{Z_n}(t) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)\right| &= \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\right| \\ &\le n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or, on sait que si X est centré de variance σ^2, on a

$$\phi_X(x) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + o(x^2).$$

Preuve du TCL 2/2

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right| \le n|z-u|.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left|\phi_{Z_n}(t) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)\right| &= \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\right| \\ &\le n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or, on sait que si X est centré de variance σ^2, on a

$$\phi_X(x) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pour deux telles variables X et Y, $\phi_X(t) - \phi_Y(t) = o(t^2)$,

Preuve du TCL 2/2

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right| \le n|z-u|.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left|\phi_{Z_n}(t) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)\right| &= \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\right| \\ &\le n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or, on sait que si X est centré de variance σ^2, on a

$$\phi_X(x) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pour deux telles variables X et Y, $\phi_X(t) - \phi_Y(t) = o(t^2)$,et à t fixé, $\phi_X(t/\sqrt{n}) - \phi_Y(t/\sqrt{n}) = o(1/n)$.

Preuve du TCL 2/2

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right| \le n|z-u|.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left|\phi_{Z_n}(t) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)\right| &= \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\right| \\ &\le n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or, on sait que si X est centré de variance σ^2, on a

$$\phi_X(x) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pour deux telles variables X et Y, $\phi_X(t) - \phi_Y(t) = o(t^2)$,et à t fixé, $\phi_X(t/\sqrt{n}) - \phi_Y(t/\sqrt{n}) = o(1/n)$.Par majoration, $n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2n}t^2\right)\right| = o(1)$,

Preuve du TCL 2/2

Pour z et u de module inférieur ou égal à 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |z^n - u^n| = \left|(z-u)\left(\sum_{k=0}^{n-1} z^k u^{n-1-k}\right)\right| \le n|z-u|.$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned}\left|\phi_{Z_n}(t) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}(t)\right| &= \left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n\right| \\ &\le n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \phi_{\mathcal{N}(0,\sigma^2)}\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right|.\end{aligned}$$

Or, on sait que si X est centré de variance σ^2, on a

$$\phi_X(x) = 1 - \frac{\sigma^2}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pour deux telles variables X et Y, $\phi_X(t) - \phi_Y(t) = o(t^2)$,et à t fixé, $\phi_X(t/\sqrt{n}) - \phi_Y(t/\sqrt{n}) = o(1/n)$.Par majoration, $n\left|\phi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) - \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2n}t^2\right)\right| = o(1)$,ce qui achève la preuve.

Binomiales et loi normale

Théorème

Pour $n \geq 1$, $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ *avec* $0 < p < 1$.
Alors $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$ *converge en loi vers la loi normale* $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = p(1-p))$
(ou encore $\frac{S_n - np}{\sqrt{n\sigma^2}}$ *converge en loi vers la loi normale* $\mathcal{N}(0,1)$ *).*

Théorème

Pour $n \geq 1$, $S_n \sim \mathcal{B}(n,p)$ avec $0 < p < 1$.
Alors $\frac{S_n - np}{\sqrt{n}}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0, \sigma^2 = p(1-p))$
(ou encore $\frac{S_n - np}{\sqrt{n\sigma^2}}$ converge en loi vers la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$).

Démonstration.

On peut réaliser S_n sous la forme $S_n = X_1 + \dots, X_n$, où les X_i sont des variables de Bernoulli indépendantes de paramètre p.
Comme les X_i sont i.i.d. avec un moment d'ordre 2, $\mathbb{E}(X_1) = p$ et $\mathrm{Var}(X_1) = p(1-p)$, le TCL s'applique. $\square$

Simulations : le code Julia

```
using Distributions, Plots
n=1000; p=1/3; bino=Binomial(n,p)
normal=Normal(0,sqrt(n*p*(1-p)))
N=10^4; densite=x->pdf(normal,x)

for i=1:2
sb=rand(bino,N).-n*p
no=rand(normal,N)
histogram(sb,normalize=true)
plot!(minimum(sb):0.01:maximum(sb),densite,
    linewidth=2,label="densite")
savefig("diag-bino-no-$i.png")
histogram(no,normalize=true)
plot!(minimum(no):0.01:maximum(no),densite,
    linewidth=2,label="densite")
savefig("diag-no-no-$i.png")
end
```

Simulations : les résultats