Probabilités et statistique

Olivier Garet

Université de Lorraine – IECL

La convergence en loi, partie 2

Théorème

Pour $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *avec* $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. *Alors* X_n *converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre* λ.

Théorème

Pour $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *avec* $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. *Alors* X_n *converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre* λ.

Démonstration.

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$$

Binomiales et Poisson

Théorème

Pour $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *avec* $\lim\limits_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0$*. Alors* X_n *converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre* λ*.*

Démonstration.

$$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^n (1 - p_n)^{-k}.$$

Binomiales et Poisson

Théorème

Pour $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *avec* $\lim_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0$. *Alors* X_n *converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre* λ.

Démonstration.

$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k}$.En l'infini $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$

Binomiales et Poisson

Théorème

Pour $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *avec* $\lim_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0$. *Alors* X_n *converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre* λ.

Démonstration.

$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^n (1 - p_n)^{-k}$.En l'infini $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$ et $p_n^k \sim (\lambda/n)^k = \lambda^k n^{-k}$.

Binomiales et Poisson

Théorème

Pour $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ avec $\lim_{n\to\infty} np_n = \lambda > 0$. Alors X_n converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre λ.

Démonstration.

$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k}$.En l'infini $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$ et $p_n^k \sim (\lambda/n)^k = \lambda^k n^{-k}$.Aussi

$$\log(1-p_n)^n = n\log(1-p_n) = n(-p_n + o(p_n)) \sim -np_n \sim -\lambda.$$

Ainsi, $\log(1-p_n)^n$ converge vers $-\lambda$ donc $(1-p_n)^n \to e^{-\lambda}$.

Binomiales et Poisson

Théorème

Pour $n \geq 1$, $X_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$ *avec* $\lim\limits_{n \to \infty} np_n = \lambda > 0$. *Alors* X_n *converge en loi vers la loi de Poisson de paramètre* λ.

Démonstration.

$\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^n (1-p_n)^{-k}$.En l'infini $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \sim \frac{n^k}{k!}$ et $p_n^k \sim (\lambda/n)^k = \lambda^k n^{-k}$.Aussi

$$\log(1-p_n)^n = n \log(1-p_n) = n(-p_n + o(p_n)) \sim -np_n \sim -\lambda.$$

Ainsi, $\log(1-p_n)^n$ converge vers $-\lambda$ donc $(1-p_n)^n \to e^{-\lambda}$.Finalement, $\mathbb{P}(X_n = k) \to e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = \mathcal{P}(\lambda)(k)$. □

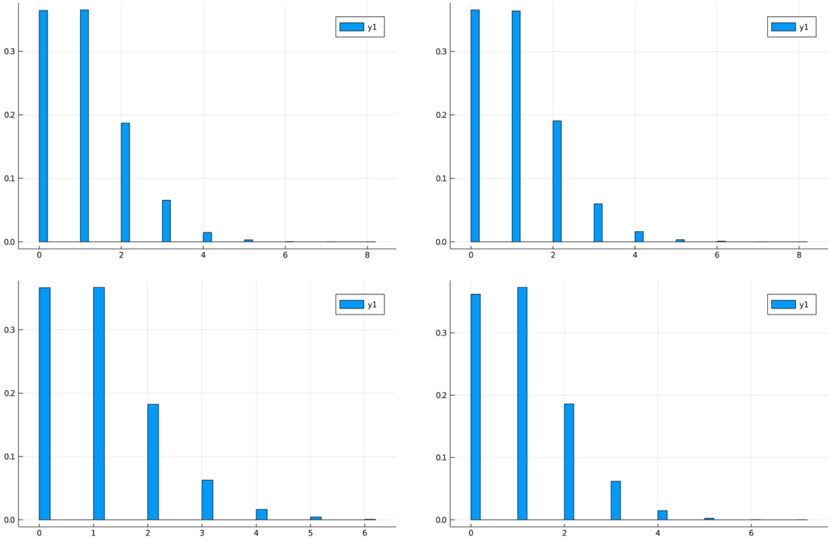
Simulations : le code Julia

```julia
using Distributions, Plots

n=100
bino=Binomial(n,1/n)
poisson=Poisson(1)
N=10^4

for i=1:2
sb=rand(bino,N)
po=rand(poisson,N)
histogram(sb,normalize=:probability)
savefig("diag-bino-$i.png")
histogram(po,normalize=:probability)
savefig("diag-poisson-$i.png")
end
```

Simulations : les résultats



Le théorème de Portmanteau

Théorème

Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. μ_n *converge faiblement vers* μ.
2. *Pour tout* $f \in u.c.b.(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu_n = \int_{\mathbb{R}^d} f \, d\mu$.
3. *Pour tout fermé* F, $\mu(F) \geq \overline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \mu_n(F)$.
4. *Pour tout ouvert* O, $\mu(O) \leq \underline{\lim\limits_{n\to+\infty}} \mu_n(O)$.
5. *Pour* A *borélien* $\mu(\partial A) = 0$ *entraîne* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.
6. *Pour tout pavé* $A = \prod\limits_{i=1}^{d}]a_i, b_i]$ *dont la frontière* ∂A *vérifie* $\mu(\partial A) = 0$, *on a* $\lim\limits_{n\to+\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

Corollaire

Soient (X_n), X *des v.a.r. On a équivalence entre :*

- (X_n) *converge en loi vers* X.
- *Pour tout point* x *où la fonction de répartition de* X *est continue,* $F_{X_n}(x)$ *tend vers* $F_X(x)$ *lorsque* n *tend vers l'infini.*

Fonctions de répartition

Corollaire

Soient (X_n), X *des v.a.r. On a équivalence entre :*

- (X_n) *converge en loi vers* X.
- *Pour tout point* x *où la fonction de répartition de* X *est continue,* $F_{X_n}(x)$ *tend vers* $F_X(x)$ *lorsque* n *tend vers l'infini.*

Rappel : F_X discontinue en $a \iff \mathbb{P}_X(\{a\}) = \mathbb{P}(X = a) > 0$. C'est la hauteur du saut. Il existe au plus une infinité dénombrable de tels points.

Corollaire

Soient (X_n), X des v.a.r. On a équivalence entre :

- *(X_n) converge en loi vers X.*
- *Pour tout point x où la fonction de répartition de X est continue, $F_{X_n}(x)$ tend vers $F_X(x)$ lorsque n tend vers l'infini.*

Rappel : F_X discontinue en $a \iff \mathbb{P}_X(\{a\}) = \mathbb{P}(X = a) > 0$.
C'est la hauteur du saut. Il existe au plus une infinité dénombrable de tels points.
Preuve :

- $\Longrightarrow$: on applique le point 5 du lemme de Portmanteau avec $A =]-\infty, a]$, $\partial A = \{a\}$.

Corollaire

Soient (X_n), X des v.a.r. On a équivalence entre :

- *(X_n) converge en loi vers X.*
- *Pour tout point x où la fonction de répartition de X est continue, $F_{X_n}(x)$ tend vers $F_X(x)$ lorsque n tend vers l'infini.*

Rappel : F_X discontinue en $a \iff \mathbb{P}_X(\{a\}) = \mathbb{P}(X = a) > 0$. C'est la hauteur du saut. Il existe au plus une infinité dénombrable de tels points.

Preuve :

- $\Longrightarrow$: on applique le point 5 du lemme de Portmanteau avec $A =]-\infty, a]$, $\partial A = \{a\}$.
- $\Longleftarrow$: on applique le point 6 du lemme de Portmanteau, en notant que $\mu_n(]a, b]) = F_{\mu_n}(b) - F_{\mu_n}(a)$ va converger vers $F_\mu(b) - F_\mu(a) = \mu(]a, b])$.

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ *et* $Y_n \Longrightarrow c$, *alors* $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ *et* $Y_n \Longrightarrow c$, *alors* $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Preuve : soit f uniformément continue bornée.

Lemme de Slutsky

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ *et* $Y_n \Longrightarrow c$*, alors* $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$*.*

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ *et* $Y_n \Longrightarrow c$, *alors* $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X, c) &= (\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)) \\ &\quad + (\mathbb{E}f(X_n, c) - \mathbb{E}f(X, c))\end{aligned}$$

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ *et* $Y_n \Longrightarrow c$, *alors* $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X, c) &= (\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)) \\ &\quad + (\mathbb{E}f(X_n, c) - \mathbb{E}f(X, c))\end{aligned}$$

Comme $X_n \Longrightarrow X$, le 2ème terme tend vers 0.

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ *et* $Y_n \Longrightarrow c$*, alors* $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$*.*

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X, c) &= (\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)) \\ &\quad + (\mathbb{E}f(X_n, c) - \mathbb{E}f(X, c))\end{aligned}$$

Comme $X_n \Longrightarrow X$, le $2^{\text{ème}}$ terme tend vers 0.
Soit ω_f le module de continuité, $\delta > 0$.

Lemme de Slutsky

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ et $Y_n \Longrightarrow c$, alors $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X, c) &= (\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)) \\ &\quad + (\mathbb{E}f(X_n, c) - \mathbb{E}f(X, c))\end{aligned}$$

Comme $X_n \Longrightarrow X$, le 2ème terme tend vers 0.
Soit ω_f le module de continuité, $\delta > 0$.

$$\begin{aligned}f(X_n, Y_n) - f(X_n, c) &= \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| \le \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c)) \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| > \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c))\end{aligned}$$

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ et $Y_n \Longrightarrow c$, alors $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X, c) &= (\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)) \\ &+ (\mathbb{E}f(X_n, c) - \mathbb{E}f(X, c))\end{aligned}$$

Comme $X_n \Longrightarrow X$, le 2$^{\text{ème}}$ terme tend vers 0.
Soit ω_f le module de continuité, $\delta > 0$.

$$\begin{aligned}f(X_n, Y_n) - f(X_n, c) &= \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| \le \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c)) \\ &+ \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| > \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c))\end{aligned}$$

$$|f(X_n, Y_n) - f(X_n, c)| \le \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| > \delta\}}$$

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ et $Y_n \Longrightarrow c$, alors $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X, c) = (\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c))\\ + (\mathbb{E}f(X_n, c) - \mathbb{E}f(X, c))\end{aligned}$$

Comme $X_n \Longrightarrow X$, le 2ème terme tend vers 0.
Soit ω_f le module de continuité, $\delta > 0$.

$$\begin{aligned}f(X_n, Y_n) - f(X_n, c) &= \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| \le \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c))\\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| > \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c))\\ |f(X_n, Y_n) - f(X_n, c)| &\le \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| > \delta\}}\\ |\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)| &\le \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|Y_n - c\| > \delta)\end{aligned}$$

Théorème

Si $X_n \Longrightarrow X$ et $Y_n \Longrightarrow c$, alors $(X_n, Y_n) \Longrightarrow (X, c)$.

Preuve : soit f uniformément continue bornée.(merci Portmanteau !)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X, c) &= (\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)) \\ &\quad + (\mathbb{E}f(X_n, c) - \mathbb{E}f(X, c))\end{aligned}$$

Comme $X_n \Longrightarrow X$, le 2ème terme tend vers 0.
Soit ω_f le module de continuité, $\delta > 0$.

$$\begin{aligned}f(X_n, Y_n) - f(X_n, c) &= \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| \le \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c)) \\ &\quad + \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| > \delta\}}(f(X_n, Y_n) - f(X_n, c)) \\ |f(X_n, Y_n) - f(X_n, c)| &\le \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{\{\|Y_n - c\| > \delta\}} \\ |\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)| &\le \omega_f(\delta) + 2\|f\|_\infty \mathbb{P}(\|Y_n - c\| > \delta)\end{aligned}$$

$$\overline{\lim_{n \to +\infty}} \ |\mathbb{E}f(X_n, Y_n) - \mathbb{E}f(X_n, c)| \le \omega_f(\delta)$$

Lemme de Slutsky (suite)

Corollaire

Si $X_n \Longrightarrow X$, $A_n \Longrightarrow \alpha$ *et* $B_n \Longrightarrow \beta$, *avec* α *et* β *des constantes, alors* $A_n X_n + B_n \Longrightarrow \alpha X + \beta$

Corollaire

Si $X_n \Longrightarrow X$, $A_n \Longrightarrow \alpha$ et $B_n \Longrightarrow \beta$, avec α et β des constantes, alors $A_n X_n + B_n \Longrightarrow \alpha X + \beta$

Démonstration.

Avec Slutsky $(X_n, A_n, B_n) \Longrightarrow (X, \alpha, \beta)$, puis on compose avec l'application continue $(a, x, b) \mapsto ax + b$ □

Corollaire

Si $X_n \Longrightarrow X$, $A_n \Longrightarrow \alpha$ et $B_n \Longrightarrow \beta$, avec α et β des constantes, alors $A_n X_n + B_n \Longrightarrow \alpha X + \beta$

Démonstration.

Avec Slutsky $(X_n, A_n, B_n) \Longrightarrow (X, \alpha, \beta)$, puis on compose avec l'application continue $(a, x, b) \mapsto ax + b$ □

Spoiler : ce résultat est très utile en statistique, dans le cas où α et β sont des paramètres du modèle, inconnus, et qu'on ne peut qu'estimer.