SUJET D'EXAMEN TERMINAL

DIPLOME : Licence de Mathématiques	Durée du sujet : 1H 30
UE : Probabilités et Statistiques	Nom du rédacteur : O. GARET
Semestre : 6	
Epreuve de :	■ 2 pages autorisées
Session 2^{nde} chance	☐ Documents non autorisés
Date : 10 juin 2021	☐ Calculatrices autorisées
Horaire : 13H30–15H00	■ Calculatrice non autorisée

Barème approximatif : exercice 1, 4 points – exercice 2, 16 points.

Rappels et notations : Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Exercice 1 Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur l'intervalle compact $[0;2]$. On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^3.$$

Montrer que S_n/n converge presque sûrement et déterminer sa limite. Montrer que $\frac{S_n-2n}{\sqrt{n}}$ converge en loi et déterminer sa limite.

Exercice 2 Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geq 1$, on pose

$$P_n = U_1 \dots U_n = \prod_{k=1}^{n} U_k.$$

1. Cas $n = 2$: montrer que pour tout $a \in]0,1]$, $\mathbb{P}(P_2 \leq a) = a(1-\log a)$. Montrer que la loi de P_2 admet une densité que l'on déterminera. Dans la suite de l'exercice, on revient au cas général.
2. (a) Montrer que $\log(U_1) \in L^1$ et calculer $\mathbb{E}(\log(U_1))$.
   (b) Montrer que $P_n^{1/n}$ converge presque sûrement vers $\frac{1}{e}$.
3. (a) On pose $S_1 = 1$, puis, pour $n \geq 1$, $S_{n+1} = S_n + P_n$.
   Montrer que pour $n \geq 1$, on a
   $$\mathbb{E}(P_n) = 2^{-n} \text{ et } \mathbb{E}(S_n) = 2 - 2^{-(n-1)}.$$
   (b) Montrer que S_n converge dans $L^1(\mathbb{P})$. On note S la limite.
   (c) Montrer que S_n converge presque sûrement vers S, puis que $\mathbb{E}(S) = 2$.

4. On pose $X_1 = 1$, puis pour $n \geq 1$, $X_{n+1} = X_n U_{n+1} + 1$.

   (a) Montrer que $\{U_{n+1} \geq 1 - \frac{1}{2n}\} \subset \{X_{n+1} - X_n \geq \frac{1}{2}\}$. (On pourra remarquer que $X_n \leq n$ pour tout n).

   (b) En déduire que $\mathbb{P}(X_n \text{ converge }) = 0$. On pourra éventuellement utiliser un lemme de Borel–Cantelli.

   (c) On admet que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a les identités matricielles

$$\begin{pmatrix} U_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} U_n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & S_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   et

$$\begin{pmatrix} U_n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{n-1} & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} U_1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_n & X_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Montrer que pour tout $n \geq 1$, X_n et S_n ont même loi.

   (d) Montrer que X_n converge en loi.

   (e) Justifier, pour tout entier naturel non nul n, les identités $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_n)$ et $\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2)$.

   (f) On pose $m_n = \mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}(X_n^2)$. Montrer que pour $n \geq 1$, on a $m_{n+1} = \frac{m_n}{3} + 2 - 2^{-(n-1)}$ et $m_n \leq \frac{9}{2}$.

   (g) Montrer que $S \in L^2$, avec Var $(S) = \frac{1}{2}$.

FIN

1 Solutions

Solution 1 Posons $Y_n = X_n^3$. Comme les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes, les $(Y_n)_{n\geq 1}$ le sont aussi.Elles suivent toutes la même loi, à savoir la loi image de la loi uniforme sur $[0;2]$ par l'application $x \mapsto x^3$.On a $|Y_n| \leq 2$, donc les $(Y_n)_{n\geq 1}$ admettent des moments de tous ordres.

D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{E}(X_1^3) = \int_{[0;2]} \frac{1}{2}x^3\ dx = \frac{2^4}{2\cdot 4} = 2.$$

Les $(Y_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 1 : d'après la loi forte des grands nombres, S_n/n converge donc vers $\mathbb{E}(Y_1) = 2$.

Par ailleurs, les $(Y_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 2 : d'après le théorème central limite, $(S_n - n\mathbb{E}Y_1)/\sqrt{n} = (S_n - 2n)/\sqrt{n}$ converge donc vers $\mathcal{N}(0, \operatorname{Var} Y_1)$.Il n'y a plus qu'à calculer sa valeur exacte : $\operatorname{Var} Y_1 = \mathbb{E}(Y_1^2) - (\mathbb{E}(Y_1))^2 = \mathbb{E}(X_1^6) - 4$.

D'après le théorème de transfert, on a

$$\mathbb{E}(X_1^6) = \int_{[0;2]} \frac{1}{2}x^6\ dx = \frac{2^7}{2\cdot 7} = \frac{2^6}{7}.$$

Finalement

$$\operatorname{Var} Y_1 = \frac{2^6}{7} - 4 = 4(\frac{2^4}{7} - 1) = \frac{4(16-7)}{7} = \frac{36}{7}.$$

Solution 2 1. Étant U_1 et U_2 variables à densité indépendants, la densité $f_{(U_1,U_2)}(u,v)$ de (U_1,U_2) est le produit des densités marginales $f_{U_1}(u)f_{U_2}(v)$. De plus $f_{U_1} = f_{U_2} = \mathbb{1}_{[0,1]}$ car les variables sont identiquement distribuées. D'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P_2 \leq a) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\{U_1U_2\leq a\}}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{1}_{\{uv\leq a\}} f_{(U_1,U_2)}(u,v) d\lambda^2(u,v) \\
&= \int_{[0,1]^2} \mathbb{1}_{\{uv\leq a\}} d\lambda^2(u,v) \\
&\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_0^1 \int_0^1 \mathbb{1}_{\{v\leq a/u\}} d\lambda(v) d\lambda(u) = \int_0^1 \frac{a}{u} \wedge 1\, d\lambda(u) \\
&= \int_0^a 1\, d\lambda(u) + \int_a^1 \frac{a}{u} d\lambda(u) = a(1-\log a).
\end{aligned}$$

Nous venons de montrer que la fonction de répartition de P_2 est $F_{P_2}(x) = x(1-\log x)$ pour tout $x \in (0,1]$. Il est claire que $F_{P_2}(x) = 1$ pour tout $x > 1$ et que $F_{P_2}(x) = 0$ pour tout $x < 0$. Remarquons que F_{P_2} est continue car

$$\lim_{x\to 0^+} F_{P_2}(x) = \lim_{x\to 0^+} x(1-\log x) = \lim_{x\to 0^+} -x\log x = \lim_{y\to+\infty} \frac{\log(y)}{y} = 0.$$

F_{P_2} est alors continue et aussi $\mathcal{C}^1$ par morceaux

2. (a) Remarquons que $\log(U_1) < 0$ alors montrer que $\log(U_1)$ est intégrable revient à calculer $\mathbb{E}(\log(U_1))$ et contrôler que cette quantité soit dans $(-\infty, 0)$. En particulier nous montrons que $\mathbb{E}(\log(U_1)) = -1$. En effet en appliquant le théorème de transfert nous obtenons $\mathbb{E}(\log(U_1)) = \int_0^1 \log u \, d\lambda(u)$. Procédons par intégration par partie

$$\mathbb{E}(\log(U_1)) = [u \log u]_0^1 - \int_0^1 u(\log u)' d\lambda(u) = 0 - \int_0^1 1 \, d\lambda(u) = -1.$$

(b) Remarquons que

$$P_n^{1/n} = \exp\left(\log(P_n^{1/n})\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log(U_k)\right)$$

Les variables $(\log(U_n)_n)_{n\geq 1}$ forment une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées admettant un moment d'ordre 1 (voir point précédent) : d'après la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log(U_k)$ converge $\mathbb{P}$-p.s. vers $\mathbb{E}(\log(U_1)) = -1$. Nous pouvons conclure par continuité de la fonction exponentielle.

3. (a) Les U_i sont indépendantes et intégrables, donc leur produit est intégrable, avec l'espérance du produit qui est le produit des intégrales : $\mathbb{E}(P_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(U_i) = (\frac{1}{2})^n = 2^{-n}$. Ensuite, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_n) - \mathbb{E}(S_1) &= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(S_{k+1}) - \mathbb{E}(S_k) = \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}(P_k)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} = \frac{1}{2}\frac{1-2^{-(n-1)}}{1-\frac{1}{2}} = 1 - 2^{-(n-1)},\end{aligned}$$

et finalement $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(S_1) + 1 - 2^{-(n-1)} = 2 - 2^{-(n-1)}$.

(b) On a pour tout $m \geq 1$, $\|P_m\|_1 = \mathbb{E}|P_m| = \mathbb{E}(P_m) = 2^{-m}$. La série des (P_m) est normalement convergente ; comme L^1 est complet, la série converge dans L^1, c'est à dire que la suite des sommes partielles S_n converge dans L^1.

(c) Comme (S_n) converge dans L^1 vers S, elle a une sous-suite qui converge presque sûrement vers S ; cependant une suite croissante qui a une sous-suite convergente converge elle-même, donc S_n converge presque sûrement vers S, et d'après le théorème de convergence monotone, $\mathbb{E}(S) = \lim \mathbb{E}(S_n)$ et finalement $\mathbb{E}(S) = 2$.

4. (a) Comme $X_{n+1} - X_n = 1 - X_n(1 - U_{n+1})$ et $X_n \leq n$, pour tout $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}&\{X_{n+1} - X_n > \varepsilon\} = \{X_n(1 - U_{n+1}) < 1 - \varepsilon\}\\ &\supseteq \{n(1 - U_{n+1}) < 1 - \varepsilon\} = \{U_{n+1} > 1 - \frac{1-\varepsilon}{n}\}.\end{aligned}$$

Ceci implique que

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\{X_{n+1} - X_n > \varepsilon\} \supseteq \overline{\lim}_{n\to\infty}\left\{U_{n+1} > 1 - \frac{1-\varepsilon}{n}\right\}.$$

(b) Les événements $\{U_{n+1} > 1 - \frac{1-\varepsilon}{n}\}$, $n \geq 1$, sont indépendantes et leur probabilité est $\frac{1-\varepsilon}{n}$. Alors la somme $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(U_{n+1} > 1 - \frac{1-\varepsilon}{n})$ diverge car $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$. Le deuxième lemme de Borel-Cantelli montre que $\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{U_{n+1} > 1 - \frac{1-\varepsilon}{n}\}) = 1$ et alors, par les inclusions ci dessus,

$$\mathbb{P}(\overline{\lim}_{n\to\infty}\{X_{n+1} - X_n > \varepsilon\}) = 1.$$

Ceci veut dire que pour $\mathbb{P}$-presque tout $\omega \in \Omega$ il y a une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$ pour lesquelles $X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega) = |X_{k+1}(\omega) - X_k(\omega)| > \varepsilon$ alors la suite $(X_n(\omega))_{n\geq 1}$ ne peut pas converger presque sûrement car elle n'est pas de Cauchy. Nous venons de démontrer que $\mathbb{P}(X_n \text{ ne converge pas}) = 1$.

(c) Les variables $(U_n)_{n\geq 1}$ sont identiquement distribuées donc les matrices $\begin{pmatrix} U_n & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $n \in \mathbb{N}$, sont identiquement distribuées. X_n et S_n sont obtenues comme la même composante du produit des matrices indépendantes avec la même loi, elle ont donc la même loi (qui est la loi image d'un vecteur de n v.a. indépendantes et identiquement distribuées par la même fonction).

(d) On a montré précédemment que S_n converge en L^1 et presque-sûrement vers une v.a. limite S. Ces deux notions de convergences impliquent la convergence en (probabilité qui implique la convergence en) loi vers la loi de S. Comme les deux suites $(S_n)_n$ et $(X_n)_n$ sont telles que $X_n \sim S_n$ pour tout $n \geq 1$ alors $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi aussi vers la loi de S.
Plus en détail nous devons montrer que pour tout φ continue et bornée $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\varphi(X_n)) = \mathbb{E}(\varphi(S))$. Comme la convergence presque sure (ou en $L^1(\mathbb{P})$) est une notion plus forte que la convergence en loi nous obtenons que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\varphi(S_n)) = \mathbb{E}(\varphi(S))$. Comme par la question précédente $\mathbb{E}(\varphi(X_n)) = \mathbb{E}(\varphi(S_n))$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\varphi(X_n)) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\varphi(S_n)) = \mathbb{E}(\varphi(S)).$$

(e) Comme X_n et S_n ont même loi, disons μ, alors aussi X_n^2 et S_n^2 ont même loi, qui est la loi image de μ par la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in [0, \infty)$. Le fait d'avoir la même loi assure que les variables ont les mêmes moments.

(f) Pour tout $n \geq 1$,

$$m_{n+1} = \mathbb{E}(X_{n+1}^2) = \mathbb{E}((U_{n+1}X_n + 1)^2) = \mathbb{E}(1 + 2U_{n+1}X_n + (U_{n+1}X_n)^2).$$

On peut démontrer, par récurrence par exemple que X_n est $\sigma(U_m, m \leq n)$-mesurable. Alors X_n et U_{n+1} sont indépendantes par indépendance des $(U_m)_{m\geq 0}$. Il en suit que

$$\begin{aligned} m_{n+1} &= \mathbb{E}(U_{n+1}^2)\mathbb{E}(X_n^2) + 1 + 2\mathbb{E}(U_{n+1})\mathbb{E}(X_n) \\ &= \frac{1}{3}m_n + 1 + \mathbb{E}(X_n) = \frac{m_n}{3} + 1 + \mathbb{E}(S_n) = \frac{m_n}{3} + 3 - 2^{-(n-1)}. \end{aligned}$$

Nous allons montrer par récurrence que $m_n \leq \frac{9}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

$$m_1 = \mathbb{E}(U_1^2) = \frac{1}{3} \leq \frac{9}{2}$$

Supposons maintenant que $m_n \leq \frac{9}{2}$ et montrons le pour m_{n+1} : comme $m_n \leq 9/2$, on a $m_{n+1} = \frac{m_n}{3} + 3 - 2^{-(n-1)} \leq \frac{9/2}{3} + 3 - 2^{-(n-1)} \leq \frac{3}{2} + 3 = \frac{9}{2}$, ce qui nous donne l'hérédité.

(g) La convergence presque sure de S_n vers S assure que S_n^2 converge presque sûrement vers S^2, de plus le fait que $1 \leq S_n \leq S_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ assure que $S_n^2 \leq S_{n+1}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (suite croissante). Par convergence monotone nous avons

$$M := \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(S_n^2) \overset{\text{conv. mon.}}{=} \mathbb{E}(\lim_{n\to\infty}(S_n^2)) = \mathbb{E}(S^2).$$

En passant à la limite dans l'équation de récurrence $m_{n+1} = \frac{m_n}{3} + 3 - 2^{-(n-1)}$, on obtient $M = \frac{M}{3} + 3$, soit $M = \frac{9}{2}$. Enfin $\text{Var}\,(S) = \mathbb{E}(S^2) - (\mathbb{E}(S))^2 = 9/2 - 2^2 = \frac{1}{2}$.